



HÁSKÓLI ÍSLANDS
RAUNVÍSINDAÐEILD

Stærðfræðigreining II (STÆ205G)

Útgáfa 2018

Sigurður Örn Stefánsson

jan. 03, 2018

1	Formáli	1
2	Gagnlegar upplýsingar	3
2.1	Námsefnið	3
2.2	Fyrirlestrar	3
2.3	Dæmi og dæmatímar	3
2.4	Skiladæmi og próftökuréttur	4
2.5	Próf	4
2.6	Að taka námskeiðið í annað sinn	4
2.7	Viðtalstímar kennara	4
2.8	Hugbúnaður	4
3	Ferlar	5
3.1	Inngangur	5
3.2	Stikaferlar	5
3.3	Ferlar og stikanir á ferlum	6
3.4	Diffrun stikaferla	6
3.5	Lengd stikaferils	8
3.6	Pólhnit	9
3.7	Pólhnitagraf	9
3.8	Snertill við pólhnitagraf	10
3.9	Flatarmál	11
3.10	Bogalengd	11
3.11	Einingarsnertivigur	12
3.12	Krappi	12
3.13	Meginþverill	12
3.14	Hjúfurplan	13
3.15	Tvíþverill	13
3.16	Vindingur	13
3.17	Frenet-Serret jöfnurnar	14
4	Hlutfleiður	15
4.1	Graf falls	15
4.2	Jafnhæðarlínur	16
4.3	Fjarlægð milli punkta	16
4.4	Opnar kúlur	16
4.5	Opin mengi	17
4.6	Jaðarpunktur	17
4.7	Skilgreiningarmengi	17
4.8	Markgildi	17
4.9	Reglur um markgildi	18

4.10	Samfelldni	18
4.11	Hlutaflleiður	18
4.12	Snertiplan	20
4.13	Hlutaflleiður af hærri stigi	21
4.14	Keðjuregla	23
4.15	Difffranleiki í einni breytistærð	26
4.16	Difffranleiki í einni breytistærð - önnur lýsing	26
4.17	Difffranleiki	26
4.18	Snertiplan	26
4.19	Difffranleiki	27
4.20	Diffur	28
4.21	Varpanir $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$	28
4.22	Jacobi-fylki	28
4.23	Difffranleiki varpana $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$	29
4.24	Keðjuregla	29
4.25	Stigull	29
4.26	Dæmi	30
4.27	Snertilína við jafnhæðarferil	30
4.28	Stefnuafleiða	31
4.29	Stigull (aftur)	32
4.30	Snertiplan við jafnhæðarflöt	32
4.31	Fólgín föll og Taylor-nálganir	32
5	Útgildisverkefni	37
5.1	Útgildi	37
5.2	Staðbundið útgildi	37
5.3	Tilvist útgilda	39
5.4	Söðulpunktur	39
5.5	Staðbundið útgildi	40
5.6	Hesse-fylki	40
5.7	Ferningsform (sjá kafla 10.7 í Adams)	40
5.8	Staðbundið útgildi	41
5.9	Ferningsform	42
5.10	Útgildi falla þar sem breytur uppfylla skorðujöfnur	42
5.11	Lagrange-margfaldarar	43
6	Margföld heildi	45
6.1	Skiptingar	45
6.2	Riemann-summa	46
6.3	Tvöfalt heildi yfir rétthyrning	46
6.4	Tvöfalt heildi yfir takmarkað svæði	47
6.5	x -einföld og y -einföld svæði	48
6.6	Heildi yfir x -einföld og y -einföld svæði	49
6.7	Óeiginleg heildi	50
6.8	Breytuskipti	50
6.9	Þreföld heildi	53
6.10	Kúluhnit	54
6.11	Breytuskipti í kúluhnit	55
6.12	Massamiðja	56
6.13	Hverfitregða	56
6.14	Yfirborðsflatarmál	57
7	Vigursvið	59
7.1	Vigursvið	59
7.2	Straumlína	60
7.3	Stigulsvið	61
7.4	Heildi falls yfir feril	62
7.5	Heildi vigursviðs eftir ferli	63
7.6	Ferilheildi og stigulsvið	63

7.7	Fletir	65
7.8	Stikafletir	65
7.9	Snertiplön	65
7.10	Flatarheildi	67
7.11	Flatarmál flata	67
7.12	Einingarþvervigrasvið	68
7.13	Áttanlegir fletir	69
7.14	Heildi vigursviðs yfir flöt - Flæði	70
8	Diffur- og heildareikningur vigursviða	73
8.1	grad, div og curl	73
8.2	Sundurleitnisetningin I	75
8.3	Sundurleitnisetningin II	76
8.4	Setning Stokes	77
8.5	Hagnýtingar í eðlisfræði	78
9	Viðauki	81
9.1	Kennsluáætlun	81

Formáli

Þetta kennsluefni er ætlað til að styðja við kennslu í áfanganum Stærðfræðigreining II við Háskóla Íslands. Það er bæði aðgengilegt sem vefsíða, <http://notendur.hi.is/sigurdur/stae205>, og sem pdf-skjal sem hentar til útprentunar. Efnid byggir upprunalega á glærupakka sem Rognvaldur Möller útbjó fyrir sambærilegan áfanga. Efnid er skrifað í Markup-tungumáli í kerfinu Sphinx sem upphaflega var hannað fyrir hjálpina í forritunarmálinu Python. Benedikt Steinar Magnússon aðlagði kerfið þannig að það hentar til að útbúa kennsluefni og naut við það aðstoðar Sólrúnar Höllu Einarsdóttur. Kerfið er opið og allar viðbætur við það eru aðgengilegar á <http://github.com/edbook>. Arnbjörg Soffía Árnadóttir og Þorsteinn Hjörtur Jónsson sáu um uppsetningu á efninu í Stærðfræðigreiningu II og kann ég þeim bestu þakkir fyrir.

Janúar 2016, Sigurður Örn Stefánsson

Sumarið 2016 var þýðingu lykilorða bætt við kerfið. Símon Böðvarsson sá um forritunarvinnuna. Þýðingar eru sóttar úr *Orðaskrá Íslenska stærðfræðafélagsins*. Þegar músabendill svífur yfir lykilorði birtist fyrsta þýðing þess samkvæmt orðaskránni. Í sumum tilfellum eru margar mögulegar þýðingar sem eiga misvel við en þá er hægt að smella á orðið til að sjá alla möguleika.

Janúar 2017, Sigurður Örn Stefánsson

Gagnlegar upplýsingar

2.1 Námsefnið

Viðfangsefnið eru varpanir sem skilgreindar eru á hlutmengi í \mathbb{R}^n og taka gildi í \mathbb{R}^m . Sérstaklega munum við skoða varpanir $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ (stikaferla) og föll $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Námskeiðið skiptist í tvo svo til jafnstóra hluta þar sem í öðrum er diffrun í aðalhlutverki og í hinum heildun. Meginþema í námskeiðinu er beiting á aðferðum stærðfræðigreiningar á rúmfræðileg verkefni.

Þegar þið þurfið virkilega að reikna, hvort sem það er í námi eða starfi, er líklegt að reyni á kunnáttu ykkar í efni þessa námskeiðs.

Notuð er sama kennslubók og í Stærðfræðigreiningu I, 8. útgáfa af Calculus eftir Adams. Í námskeiðinu verður farið yfir mest allt efni kafla 8, 11, 12, 13, 14, 15 og 16 (sjá [áætlun um fyrirlestra](#)). Nemendur í Stærðfræðigreiningu IIE sækja tíma 1-19 og tíma 28 að tíma 9 undanskildum.

2.2 Fyrirlestrar

Fyrirlestrar verða 8:20-9:50 á mánudögum og 10:00-11:30 á miðvikudögum. Í [fyrirlestraáætlun](#) og á dæmablöðunum er sagt nánar frá efni fyrirlestra hverrar viku og vísað á viðeigandi efnisgreinar í bók. Helstu atriði fyrirlestranna verða aðgengileg á vefnum en einnig má nálgast prentvæna útgáfu í [pdf-skjali](#). Að mestu verður fylgt þeirri efnisröð sem er í bók Adams.

2.3 Dæmi og dæmatímar

Í tímunum 15:00-16:30 á mánudögum og 14:10-15:40 á þriðjudögum verða reiknuð dæmi. Þið getið valið í hvorn tímann þið mætið. Rætt verður um lausnir skiladæma í tímanum 11:40-12:20 á miðvikudögum.

Því til viðbótar verða stoðtímar á miðvikudögum og fimmtudögum. Í þeim tímum gefst ykkur tækifæri á að fá aðstoð við skiladæmi og önnur dæmi sem þið eruð að glíma við og einnig að fá nánari útskýringar á atriðum úr fyrirlestrum og leystum dæmum. Þið getið valið í hvaða stoðtíma þið mætið en athugið að yfirleitt er mest álag í fimmtudagstímunum og því getur verið auðveldara að fá aðstoð fyrir í vikunni.

Dæmablöð og lausnir skiladæma verða settar á skráasvæðið í UGLU.

Í dæmatímum verður fyrst farið yfir dæmi með undirstrikuðum númerum.

2.4 Skiladæmi og próftökuréttur

Á misserinu verða 11 sinnum (IIE: 9 sinnum) lögð fyrir skiladæmi. Fyrstu skiladæmi verða föstudaginn 12. janúar.

Mikilvægt: Til að öðlast próftökurétt þarf að skila að minnsta kosti **7 af 11** (IIE: **5 af 9**) heimadæmum. Skil teljast ekki gild nema þið hafi náð 50% árangri í glímunni við dæmin. Þið berið sjálf ábyrgð á að fylgjast með að skil séu rétt skráð í Uglunni. Yfirfarin heimadæmi undirrituð af aðstoðarkennara gilda sem kvittun fyrir skilum. Haldið þeim því til haga!

Dæmum á að skila fyrir 13:00 á föstudögum í **hólf merkt Sigurður Örn Stefánsson** í anddyri VRII. Vinsamlegast merkið lausnir ykkar með **fullu nafni** ykkar og hvaða grein þið eruð í (t.d. rafmagnsverkfræði, efnafræði. . .) **efst á fremstu síðunni**. Ef lausnir ykkar eru á tveimur eða fleiri blöðum þá þurfið þið að hefta þau saman. Yfirfarnar úrlausnir má nálgast í rekkunum við stigann á jarðhæð í VRII á miðvikudagsmorgni vikuna eftir skil.

2.5 Próf

Á misserinu verða tvö stutt próf sem hvort um sig gildir 15% til lokaekunnar en þó eingöngu til hækkunar. Ég stefni að því að hafa fyrra prófið í tíma 21. febrúar. Þá verður prófað úr lesnu efni, skilgreiningum og setningum. Seinna prófið verður væntanlega í tíma 21. mars. Á því prófi verða dæmi og atriði sem hafa komið fyrir í skiladæmum. Engin skiladæmi eru lögð fyrir þær vikur sem prófin eru haldin.

Í lok námskeiðsins er þriggja tíma skriflegt próf sem gildir 70%. Nauðsynlegt og nægjanlegt er að fá a.m.k. 5 í lokaprófinu til að standast námskeiðið. Engin hjálpargögn eru heimil í prófinu, nema formúlublöð sem fylgja prófverkefni. Vasareiknar eru ekki leyfðir í prófinu. Á prófinu verða dæmi úr öllum hlutum námsefnisins. Dæmin munu bæði reyna á reiknifærni og grundvallarskilning á hugtökum.

2.6 Að taka námskeiðið í annað sinn

Þau ykkar sem sátuð námskeiðið í fyrra og unnuð ykkur inn próftökurétt haldið próftökuréttinum en eldri próftökuréttur gildir ekki. Einkunnir úr misserisprófum frá í fyrra gilda ekki. Þið eruð hvött til að taka fullan þátt í námskeiðinu með dæmaskilum og þátttöku í misserisprófum.

2.7 Viðtalstímar kennara

Kennari námskeiðsins er Sigurður Örn Stefánsson, og hefur skrifstofu á þriðju hæð í Tæknigarði. Tímarnir frá 11:40 - 12:20 á miðvikudögum verða nýttir til að fara yfir lausnir skiladæma og í fyrirspurnir og aðrar umræður. Aðrir viðtalstímar eru eftir samkomulagi. Síminn minn er 525 5481 og tölvupóstfangið er sigurdur@hi.is.

Mikilvægt: Þar sem mjög margir nemendur eru í námskeiðinu bið ég ykkur um að íhuga áður en þið sendið tölvupóst hvort svarið við spurningunni sé að finna í þessu skjali eða hvort þið gætuð borið spurninguna fram í fyrirlestri, dæmatíma, stoðtíma eða viðtalstíma.

2.8 Hugbúnaður

Við munum nota forritið Matlab í námskeiðinu, aðallega til að framkalla teikningar. Á heimasíðu Kristjáns Jónssonar getið þið nálgast útgáfu af Matlab fyrir nemendur háskólans.

Fyrir þá sem kjósa frjálstan hugbúnað þá má benda á að forritið *Octave*, er að mestu leyti sambærilegt við Matlab. Þá er einnig möguleiki að keyra *Octave* gegnum vafra.

Winter is coming.

- George R.R. Martin, A Game of Thrones

3.1 Inngangur

- Viðfangsefni námskeiðsins er varpanir sem skilgreindar eru á hlutmengi í \mathbf{R}^n og taka gildi í \mathbf{R}^m .
- Fáumst við stærðfræðigreiningu í mörgum breytistærðum.
- Sambærileg verkefni og í stærðfræðigreiningu í einni breytistærð: Samfelldni, diffrun, heildun. Rúmfræðileg túlkun skiptir nú miklu máli.
- Gerir okkur kleift að fást við mörg raunveruleg verkefni þar sem margar breytistærðir koma við sögu.

3.2 Stikaferlar

3.2.1 Skilgreining

Vörpun $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ þannig að $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ kallast *vigurgild vörpun*. Slík vörpun er sögð samfelld ef föllin r_1, \dots, r_n eru öll samfelld. Samfelld vörpun $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ er oft kölluð *stikaferill*.

3.2.2 Ritháttur

Þegar fjallað er um stikaferil $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ þá er oft ritað

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

og þegar fjallað er um stikaferil $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ þá er oft ritað

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

3.3 Ferlar og stikanir á ferlum

3.3.1 Skilgreining

Ferill í plani er mengi punkta (x, y) í planinu þannig að skrifa má $x = f(t)$ og $y = g(t)$ fyrir t á bili I þar sem f og g eru samfelld föll á I . Auk þess liggur $(f(t), g(t))$ í punktamenginu fyrir öll $t \in I$. Bilið I ásamt föllunum (f, g) kallast stikun á ferlinum. Ferill í rúmi og stikun á ferli í rúmi eru skilgreind á sambærilegan hátt.

Aðvörun: Ferill í plani/rúmi er **ekki** það sama og stikaferill. Fyrir gefinn feril eru til (óendanlega) margar ólíkar stikanir.

3.3.2 Dæmi - Eðlisfræðileg túlkun

Líta má á veginn milli Reykjavíkur og Akureyrar sem feril.

Líta má á ferðalag eftir veginum frá Reykjavík til Akureyrar þar sem staðsetning er þekkt á hverjum tíma sem stikaferil þar sem tíminn er stikinn.

3.3.3 Dæmi

Jafnan

$$x^2 + y^2 = 1$$

lýsir ferli í planinu sem er hringur með miðju í $(0,0)$ og geisla 1. Dæmi um ólíkar stikanir:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= (\cos(t), \sin(t)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, 2\pi]. \\ \mathbf{r}_2(t) &= \begin{cases} (t, \sqrt{1-t^2}) & \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [-1, 1], \\ (2-t, -\sqrt{1-(2-t)^2}) & \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [1, 3]. \end{cases} \end{aligned}$$

3.4 Diffrun stikaferla

3.4.1 Skilgreining

Stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ er *diffranlegur í punkti t* ef markgildið

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

er til. Stikaferillinn \mathbf{r} er sagður *diffranlegur* ef hann er diffranlegur í öllum punktum á bilinu $[a, b]$. (Í endapunktum bilsins $[a, b]$ er þess krafist að einhliða afleiður séu skilgreindar.)

3.4.2 Setning

Stikaferill $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ er *diffranlegur í punkti t* ef og aðeins ef föllin r_1, \dots, r_n eru öll diffranleg í t . Þá gildir að

$$\mathbf{r}'(t) = (r'_1(t), \dots, r'_n(t)).$$

3.4.3 Ritháttur

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ vera diffranlegan stikaferil. Venja er að rita $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ og tala um $\mathbf{v}(t)$ sem *hraða* eða *hraðavigur*. Talan $|\mathbf{v}(t)|$ er kölluð *ferð*. Einnig er ritað $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ og talað um $\mathbf{a}(t)$ sem *hröðun* eða *hröðunarvigur*.

3.4.4 Dæmi

Lítum á eftirfarand stikaferla sem stika hring með miðju í $(0,0)$ og geisla 1.

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, 2\pi].$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, \sqrt{2\pi}].$$

Þá er tilsvareandi hraði

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{r}'_1(t) = (-\sin(t), \cos(t)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, 2\pi].$$

$$\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{r}'_2(t) = (-2t \sin(t^2), 2t \cos(t^2)), \quad \text{fyrir } t \text{ á bilinu } [0, \sqrt{2\pi}].$$

og ferðin $|\mathbf{v}_1(t)| = 1$ og $|\mathbf{v}_2(t)| = 2t$.

3.4.5 Setning

Látum $\mathbf{u}, \mathbf{v} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ vera diffranlega stikaferla og λ diffranlegt fall. Þá eru stikaferlarnir $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$, $\lambda(t)\mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{u}(\lambda(t))$ diffranlegir, og ef $n = 3$ þá er stikaferillinn $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ líka diffranlegur. Fallið $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ er líka diffranlegt. Eftirfarandi listi sýnir formúlur fyrir afleiðunum:

(a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t),$

(b) $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t),$

(c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t),$

(d) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t),$

(e) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \mathbf{u}'(\lambda(t))\lambda'(t).$

Ef $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$ þá er

(f) $\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}.$

3.4.6 Skilgreining

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n; \mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ vera stikaferil.

Stikaferillinn er sagður *samfelld diffranlegur* ef föllin $r_1(t), \dots, r_n(t)$ eru öll diffranleg og afleiður þeirra eru samfelldar. Samfelld diffranlegur stikaferill er sagður *þjáll* ef $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ fyrir öll t .

Stikaferillinn er sagður *samfelld diffranlegur á köflum* ef til eru tölur b_0, \dots, b_k þannig að $a = b_0 < b_1 < \dots < b_k = b$ og stikaferillinn er samfelld diffranlegur á hverju bili $[b_{i-1}, b_i]$. Það að stikaferill sé *þjáll á köflum* er skilgreint á sambærilegan hátt.

3.4.7 Setning

Látum $\mathbf{r} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ vera samfelld diffranlegan stikaferil fyrir t á bili I . Ef $f'(t) \neq 0$ á I þá hefur ferillinn *snertilínu* fyrir hvert gildi á t og hallatala hennar er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Ef $g'(t) \neq 0$ á I þá hefur ferilinn þverlínu fyrir hvert gildi á t og hallatala hennar er

$$-\frac{dx}{dy} = -\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

3.5 Lengd stikaferils

3.5.1 Regla

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ vera samfelld diffranlegan stikaferil. Lengd eða *bogalengd* stikaferilsins er skilgreind með formúlunni

$$s = \int_a^b |\mathbf{v}(t)| dt.$$

3.5.2 Skilgreining og umræða

Látum $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ vera samfelld diffranlegan stikaferil. Sagt er að stikaferillinn sé *stikaður með bogalengd* ef fyrir allar tölur t_1, t_2 þannig að $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ þá gildir

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt.$$

(Skilyrðið segir að lengd stikaferilsins á milli punkta $\mathbf{r}(t_1)$ og $\mathbf{r}(t_2)$ sé jöfn muninum á t_2 og t_1 .) Stikun með bogalengd má líka þekkja á þeim eiginleika að $|\mathbf{v}(t)| = 1$ fyrir öll gildi á t .

Sýnidæmi

Stikum gormferilinn $\mathbf{r} = a \cos(t)\mathbf{i} + a \sin(t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$ með bogalengd frá punkti $(a, 0, 0)$ í stefnu vaxandi t .

Lausn: Reiknum

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= -a \sin(t)\mathbf{i} + a \cos(t)\mathbf{j} \quad \text{og} \\ |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{a^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Þá er lengd ferilsins frá 0 til t gefin með

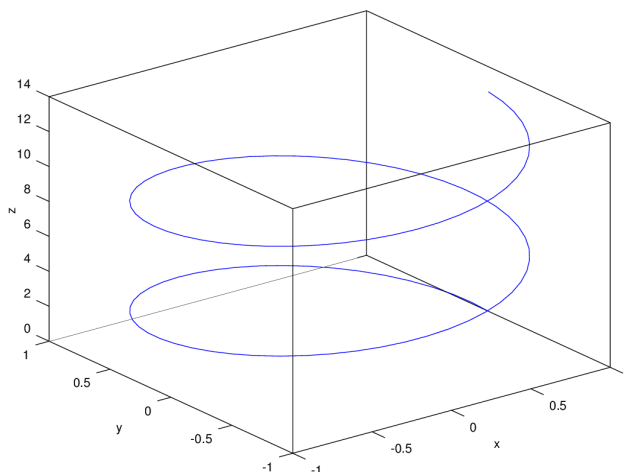
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\tau = \sqrt{a^2 + b^2}t$$

og ef við leysum fyrir t sem fall af s fæst

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Þá er stikun með bogalengd, köllum hana \mathbf{r}_b , gefin með

$$\mathbf{r}_b(s) = \mathbf{r}(t(s)) = a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\mathbf{i} + a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\mathbf{j} + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{k}.$$



Gormferillinn fyrir gildin $a = b = 1$ og $\theta \in [0, 4\pi]$.

3.6 Pólhnit

- Þegar við fáumst við verkefni í mörgum víddum höfum við frelsi til að velja hnitakerfi.
- Heppilegt val á hnitakerfi getur skipt sköpum við lausn verkefnis.

3.6.1 Skilgreining

Látum $P = (x, y) \neq \mathbf{0}$ vera punkt í plani. Pólhnit P er talnapar $[r, \theta]$ þannig að r er fjarlægð P frá $O = (0, 0)$ og θ er hornið á milli striksins \overline{OP} og x -ássins. (Hornið er mælt þannig að rangsælis stefna telst jákvæð, og leggja má við θ heil margfeldi af 2π .)

3.6.2 Regla

Ef pólhnit punkts í plani eru $[r, \theta]$ þá má reikna hornrétt hnit hans (xy -hnit) með formúlunum

$$x = r \cos \theta \quad \text{og} \quad y = r \sin \theta.$$

Ef við þekkjum xy -hnit punkts þá má finna pólhnitin út frá jöfnunum

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{og} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

(Ef $x = 0$ þá má taka $\theta = \frac{\pi}{2}$ ef $y > 0$ en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ef $y < 0$. Þegar jafnan $\tan \theta = \frac{y}{x}$ er notuð til að ákvarða θ þá er tekin lausn á milli $-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$ ef $x > 0$ en á milli $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$ ef $x < 0$.)

3.7 Pólhnitagraf

3.7.1 Skilgreining og umræða

Látum f vera fall skilgreint fyrir θ þannig að $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Jafnan $r = f(\theta)$ lýsir mengi allra punkta í planinu sem hafa pólhnit á forminu $[f(\theta), \theta]$ þar sem $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Þetta mengi kallast *pólhnitagraf* fallsins f .

Pólhnitagraf er ferill í planinu sem má stika með stikaferlinum

$$\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

með formúlu

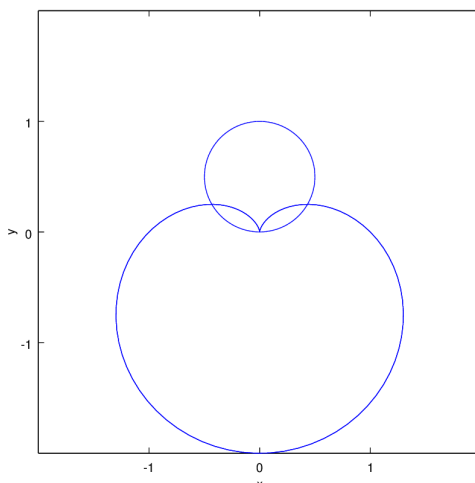
$$\mathbf{r}(\theta) = [f(\theta), \theta] = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta).$$

Sýnidæmi

Finnum skurðpunkta hjartaferilsins $r = 1 - \sin \theta$ og hringursins $r = \sin \theta$.

Lausn: Athugum fyrst hvort ferlarnir skerist fyrir sama gildi á $r > 0$ og θ . Leysum þá jöfnuna $1 - \sin \theta = \sin \theta$ og fáum $\sin \theta = \frac{1}{2}$. Hjartaferillinn er með lotu 2π en hringurinn lotu π svo nóg er að skoða lausnir fyrir $\theta \in [0, 2\pi]$. Fáum lausnir $\theta = \pi/6$ og $\theta = 5\pi/6$ og skurðpunktarnir eru því $[1/2, \pi/6]$ og $[1/2, 5\pi/6]$.

Athugið að við þurfum einnig að athuga hvort ferlarnir skerist þegar $r = 0$ en þá gætu þeir skorist fyrir ólík gildi á θ . Hjartaferillinn sker punktinn $(0, 0)$ þegar $\theta = \pi/2$ og hringurinn sker $(0, 0)$ fyrir $\theta = 0$ og því er $(0, 0)$ einnig skurðpunktur.



Hringurinn og hjartaferillinn saman á mynd. Á myndinni má sjá skurðpunktana þrjá sem reiknaðir voru að ofan.

3.8 Snertill við pólhnitagraf

3.8.1 Setning

Látum $r = f(\theta)$ vera pólhnitagraf fallsins f og gerum ráð fyrir að fallið f sé samfelld diffranlegt. Látum $\mathbf{r}(\theta)$ tákna stikunina á pólhnitagrafinu sem innleidd er í 1.7.1. Ef vigurinn $\mathbf{r}'(\theta) \neq \mathbf{0}$ þá gefur þessi vigur stefnu *snertils* við pólhnitagrafið og út frá $\mathbf{r}'(\theta)$ má reikna hallatölu snertils við pólhnitagrafið.

3.9 Flatarmál

3.9.1 Setning

Flatarmál svæðisins sem afmarkast af geislunum $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ (með $\alpha \leq \beta$ og $\beta - \alpha \leq 2\pi$) og pólhnitagrafi $r = f(\theta)$ (f samfellt) er

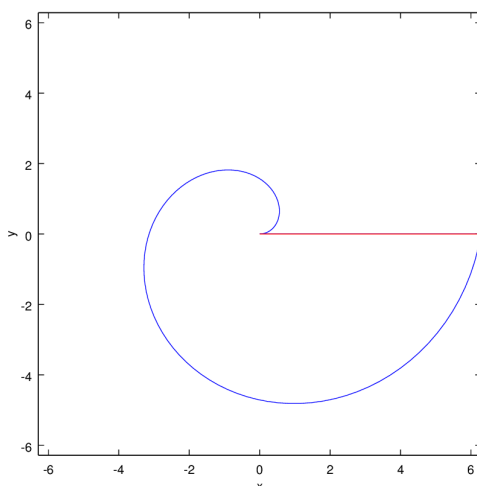
$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta.$$

Sýnidæmi

Finnum flatarmál svæðisins sem afmarkast af spíralnum $r = \theta$ og geislunum $\theta = 0$ og $\theta = 2\pi$.

Lausn: Köllum flatarmálið A . Reiknum

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{3} (2\pi)^3 = \frac{4\pi^3}{3}.$$



Mynd af spíralnum (í bláu) og geislunum (í rauðu). Svæðið afmarkast af bláu og rauðu ferlunum.

3.10 Bogalengd

3.10.1 Setning

Gerum ráð fyrir að fallið $f(\theta)$ sé diffranlegt. Bogalengd pólhnitagrafsins $r = f(\theta)$, þegar $\alpha \leq \theta \leq \beta$, er gefin með formúlunni

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta.$$

Sýnidæmi

Finnum bogalengd spíralsins sem skilgreindur er með pólhnitagrafinu $r = \theta$ fyrir $\theta \in [0, 2\pi]$.

Lausn: Köllum bogalengdina s og reiknum

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \quad \text{notum innsetningu } \theta = \sinh(x) \\ &= \int_0^{\sinh^{-1}(2\pi)} \sqrt{1 + \sinh^2(x)} \cosh(x) dx = \int_0^{\sinh^{-1}(2\pi)} \cosh^2(x) dx \\ &= \int_0^{\sinh^{-1}(2\pi)} \frac{1 + \cosh(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\sinh^{-1}(2\pi) + \frac{1}{2} \sinh(2 \sinh^{-1}(2\pi)) \right). \end{aligned}$$

3.11 Einingarsnertivigur

3.11.1 Skilgreining

Látum \mathcal{C} vera feril í plani eða rúmi. Látum \mathbf{r} vera stikun á \mathcal{C} og gerum ráð fyrir að \mathbf{r} sé þjáll stikaferill (þ.e.a.s. \mathbf{r} er samfelldt diffranlegur stikaferill og $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ fyrir öll t). Einingarsnertivigurinn \mathbf{T} við ferilinn \mathcal{C} í punktinum $\mathbf{r}(t)$ er skilgreindur með formúlunni

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}.$$

3.12 Krappi

3.12.1 Skilgreining

Látum \mathcal{C} vera feril í plani eða rúmi og \mathbf{r} stikun á \mathcal{C} með bogalengd. (Þegar fjallað er um stikanir með bogalengd er venja að tákna stikann með s .) Lengd hraðavigns er alltaf 1 og því er $\mathbf{T}(s) = \mathbf{v}(s)$. Krappi ferilsins \mathcal{C} í punktinum $\mathbf{r}(s)$ er skilgreindur sem talan

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|.$$

Krappageisli í punktinum $\mathbf{r}(s)$ er skilgreindur sem

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

3.13 Meginþverill

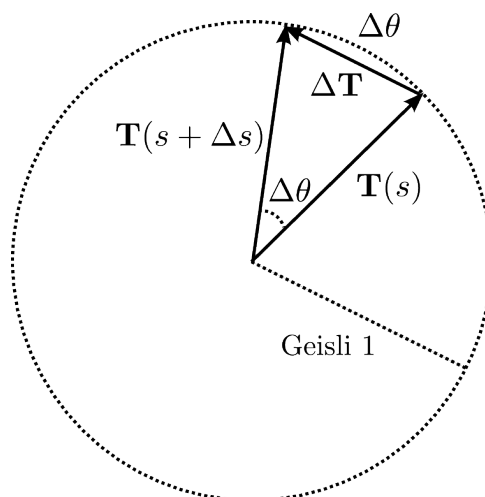
3.13.1 Skilgreining

Látum \mathcal{C} vera feril í plani eða rúmi og \mathbf{r} stikun á \mathcal{C} með bogalengd. Meginþverill í punkti $\mathbf{r}(s)$ er skilgreindur sem vigrinn

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|} = \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{T}'(s).$$

3.13.2 Umræða

Táknum með θ hornið sem \mathbf{T} myndar við grunnvigrinn \mathbf{i} . Þá er $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$.



3.14 Hjúfurplan

3.14.1 Skilgreining

Látum \mathcal{C} vera feril í plani eða rúmi og \mathbf{r} stikun á \mathcal{C} með bogalengd.

Hjúfurplanið við ferilinn í punkti $\mathbf{r}(s)$ er planið sem spannað er af vigrunum $\mathbf{T}(s)$ og $\mathbf{N}(s)$ og liggur um punktin $\mathbf{r}(s)$.

Hjúfurhringur við ferilinn í punkti $\mathbf{r}(s)$ er hringur sem liggur í hjúfurplaninu, fer í gegnum punktin $\mathbf{r}(s)$, hefur geisla $\rho(s)$ og hefur miðju í punktinum $\mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s)$.

3.15 Tvíþverill

3.15.1 Skilgreining

Látum \mathcal{C} vera feril í plani eða rúmi og \mathbf{r} stikun á \mathcal{C} með bogalengd. Vigurinn

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

kallast *tvíþverill* við ferilinn í $\mathbf{r}(s)$.

$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ er þverstaðlaður grunnur og kallast **Frenet ramminn**.

3.16 Vindingur

3.16.1 Setning og skilgreining

Látum \mathcal{C} vera feril í plani eða rúmi og \mathbf{r} stikun á \mathcal{C} með bogalengd. Vigurinn $\mathbf{B}'(s)$ er samsíða vigrinum $\mathbf{N}(s)$, þ.e.a.s. $\mathbf{B}'(s)$ er margfeldi af $\mathbf{N}(s)$. Talan $\tau(s)$ þannig að

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s)$$

kallast *vindingur* ferilsins í punktinum $\mathbf{r}(s)$.

3.17 Frenet-Serret jöfnurnar

3.17.1 Jöfnur

Látum \mathcal{C} vera feril í plani eða rúmi og \mathbf{r} stikun á \mathcal{C} með bogalengd. Þá gildir

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \kappa\mathbf{N} \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B}'(s) &= -\tau\mathbf{N}.\end{aligned}$$

3.17.2 Setning

Látum \mathcal{C} vera feril í plani eða rúmi. Gerum ráð fyrir að \mathbf{r} sé þjáll stikaferill sem stikar \mathcal{C} . Ritum $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$ og $\mathbf{a} = \mathbf{r}''(t)$. Þá gildir í punktinum $\mathbf{r}(t)$ að

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T},$$

einnig er

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}.$$

Sýnidæmi

Gerum ráð fyrir að f sé tvisvar sinnum diffranlegt. Finnum krappa ferilsins $y = f(x)$ í punktinum $(x, f(x))$.

Lausn: Stikum ferilinn með $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$. Þá eru hraðinn \mathbf{v} og hröðunin \mathbf{a} gefin með

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(x) &= \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j} \\ \mathbf{a}(x) &= f''(x)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Reiknum svo krossfeldið

$$\mathbf{v}(x) \times \mathbf{a}(x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{vmatrix} = f''(x)\mathbf{k}.$$

Þá er krappinn gefinn með

$$\kappa(x) = \frac{|\mathbf{v}(x) \times \mathbf{a}(x)|}{|\mathbf{v}(x)|^3} = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}.$$

“If you need help bark like a dog.” - Gendry. „That’s stupid. If I need help I’ll shout help.“ - Arya”
- George R.R. Martin, A Clash of Kings

4.1 Graf falls

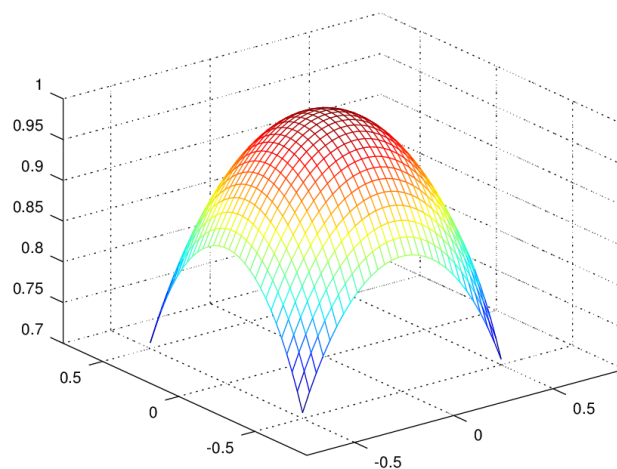
4.1.1 Skilgreining

Látum $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall. Graf fallsins er skilgreint sem mengið

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Ef $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ er fall, þá er graf fallsins skilgreint sem mengið

$$\{(x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$



Graf fallsins $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.

4.2 Jafnhæðarlínur

4.2.1 Skilgreining

Látum $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall. Ef c er fasti þá er mengið

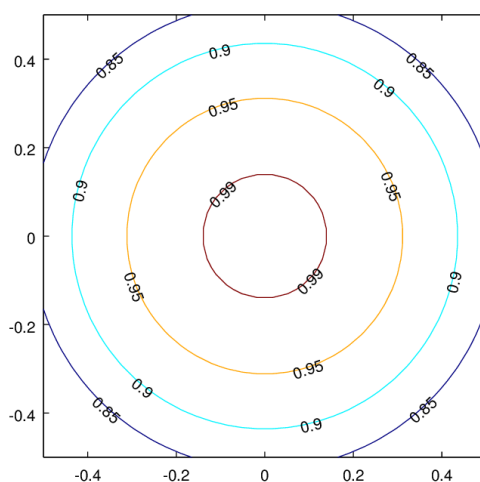
$$\{(x, y) \mid f(x, y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

kallað *jafnhæðarlína* eða *jafnhæðarferill* fallsins f fyrir fastann c .

Látum $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall. Ef c er fasti þá er mengið

$$\{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = c\}$$

kallað *jafnhæðarflötur* fallsins f fyrir fastann c .



Nokkrar jafnhæðarlínur fallsins $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.

4.3 Fjarlægð milli punkta

4.3.1 Skilgreining

Fjarlægðin milli tveggja punkta $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ í \mathbf{R}^n er skilgreind sem talan

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

4.4 Opnar kúlur

4.4.1 Skilgreining

Látum $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ vera punkt í \mathbf{R}^n . Skilgreinum *opnu kúluna* með miðju í P og geisla r sem mengið

$$B_r(P) = \{Q \in \mathbf{R}^n \mid |Q - P| < r\}.$$

Í \mathbb{R}^2 er eðlilegra að tala um *opna skífu* eða *opinn disk* í stað opinnar kúlu og í \mathbb{R} þá er talað um opin bil.

4.5 Opin mengi

4.5.1 Skilgreining

Látum U vera hlutmengi í \mathbf{R}^n .

Sagt er að U sé *opið mengi* ef um sérhvern punkt P í U gildir að til er tala $r > 0$ þannig að $B_r(P) \subseteq U$.

Mengið U er sagt *lokað* ef *fyllimengið* er opið. (Fyllimengi U er skilgreint sem mengið $\mathbf{R}^n \setminus U = \{Q \in \mathbf{R}^n \mid Q \notin U\}$.)

4.6 Jaðarpunktur

4.6.1 Skilgreining

Látum U vera mengi í \mathbf{R}^n . Punktur P í \mathbf{R}^n er sagður *jaðarpunktur* U ef sérhver opin kúla $B_r(P)$ með $r > 0$ inniheldur bæði punkt úr U og punkt úr $\mathbf{R}^n \setminus U$. (Athugið að bæði er mögulegt að jaðarpunktur U sé í U og að hann sé ekki í U .)

4.7 Skilgreiningarmengi

4.7.1 Skilgreining

Fyrir fall $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ þá táknar $\mathcal{D}(f)$ *skilgreiningarmengi* fallsins f . Ef fallið er gefið með formúlu og ekkert sagt um $\mathcal{D}(f)$ þá lítum við svo á að $\mathcal{D}(f)$ sé mengi allra punkta í \mathbf{R}^n þannig að formúlan gefi vel skilgreinda tölu.

4.8 Markgildi

4.8.1 Skilgreining

Látum $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vera fall af n breytistærðum með skilgreiningarmengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbf{R}^n$. Látum $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ vera punkt í \mathbf{R}^n þannig að sérhver opin kúla um P inniheldur meira en einn punkt úr $\mathcal{D}(f)$.

Segjum að $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *stefni á tölu* L þegar (x_1, x_2, \dots, x_n) stefnir á (p_1, p_2, \dots, p_n) ef eftirfarandi gildir:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að ef $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(f)$ og

$$0 < |(x_1, x_2, \dots, x_n) - (p_1, p_2, \dots, p_n)| < \delta$$

þá er

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L| < \epsilon.$$

4.8.2 Ritháttur

Ef $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stefnir á tölu L þegar (x_1, x_2, \dots, x_n) stefnir á (p_1, p_2, \dots, p_n) þá er ritað

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (p_1, p_2, \dots, p_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L.$$

og L kallast *markgildi* fallsins f í punktinum (x_1, x_2, \dots, x_n) .

4.8.3 Skilgreining (Skilgreining 2.8.1 sett fram fyrir föll af tveimur breytum.)

Látum $f(x, y)$ vera fall skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Látum (a, b) vera punkt í \mathbb{R}^2 þannig að sérhver opin skífa um (a, b) inniheldur meira en einn punkt úr $\mathcal{D}(f)$.

Segjum að $f(x, y)$ stefni á tölu L þegar (x, y) stefnir á (a, b) ef eftirfarandi gildir:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að ef $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ og

$$\delta > |(x, y) - (a, b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} > 0$$

þá er

$$|f(x, y) - L| < \epsilon.$$

4.9 Reglur um markgildi

4.9.1 Setning

Látum f og g vera föll af tveimur breytum. Gerum ráð fyrir að

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \quad \text{og} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = M,$$

og að sérhver *grennd* um (a, b) innihaldi fleiri en einn punkt þar sem bæði föllin f og g eru skilgreind. Þá gildir

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x, y) \pm g(x, y)) = L \pm M.$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = LM.$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M}$, svo framarlega sem $M \neq 0$.

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(f(x, y)) = F(L)$ ef F er fall af einni breytistærð sem er samfelld í punktinum L .

4.10 Samfelldni

4.10.1 Skilgreining

Látum f vera fall af n breytistærðum skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f)$ í \mathbb{R}^n . Fallið f er sagt *samfelld í punkti* (p_1, p_2, \dots, p_n) í $\mathcal{D}(f)$ ef

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (p_1, p_2, \dots, p_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Sagt er að fallið sé *samfelld* ef það er samfelld í öllum punktum skilgreiningarmengis síns.

4.11 Hlutfleiður

4.11.1 Skilgreining

Látum $f(x, y)$ vera fall af tveimur breytum x og y sem er skilgreint á opinni skífu með miðju í punktinum (a, b) .

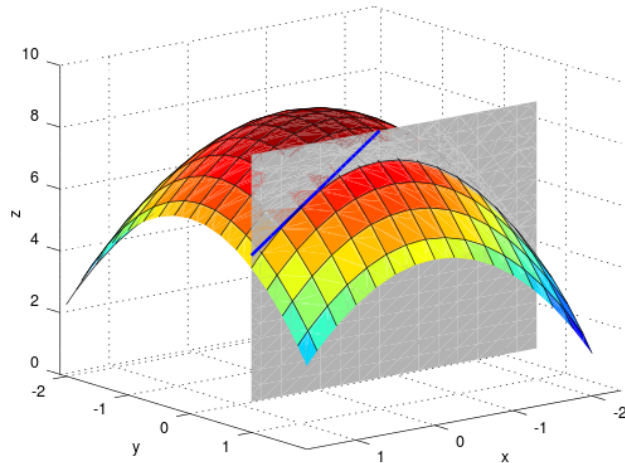
Skilgreinum *hlutfleiðu* m.t.t. x í (a, b) með

$$f_1(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

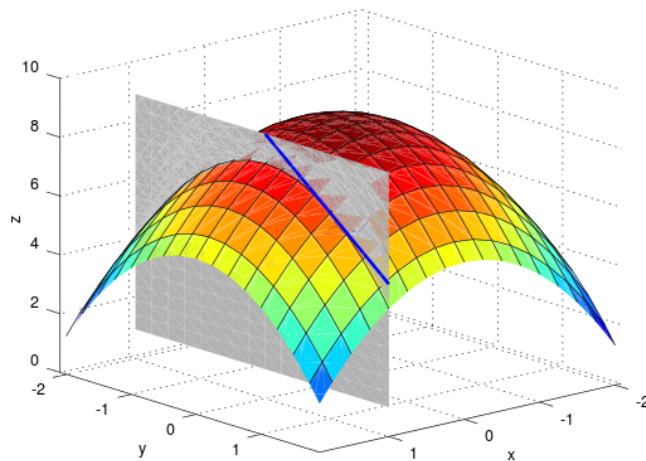
og *hlutfleiðu* m.t.t. y í (a, b) með

$$f_2(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

ef markgildin eru til.



Hlutfleiða m.t.t. x fyrir $y = 1$.



Hlutfleiða m.t.t. y fyrir $x = 1$.

4.11.2 Skilgreining

Látum $f(x, y, z)$ vera fall af þremur breytum x , y og z sem er skilgreint á opinni kúlu með miðju í punktinum (a, b, c) .

Skilgreinum *hlutfleiðu* m.t.t. x í (a, b, c) með

$$f_1(a, b, c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b, c) - f(a, b, c)}{h},$$

hlutfleiðu m.t.t. y í (a, b, c) með

$$f_2(a, b, c) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k, c) - f(a, b, c)}{k}$$

og hlutfleiðu m.t.t. z í (a, b, c) með

$$f_3(a, b, c) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c + \ell) - f(a, b, c)}{\ell}$$

ef markgildin eru til.

4.11.3 Skilgreining

Látum f vera fall af n breytum x_1, x_2, \dots, x_n sem er skilgreint á opinni kúlu um punktinn $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Hlutfleiða f með tilliti til breytunnar x_k í punktinum \mathbf{a} er skilgreind sem markgildið

$$f_k(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{h}$$

ef markgildið er til. (Hér stendur \mathbf{e}_k fyrir vigurinn sem er með 0 í öllum hnitum nema því k -ta þar sem er 1.)

4.11.4 Ritháttur

Ritum $z = f(x, y)$. Ýmis konar ritháttur er fyrir hlutfleiður, m.a.

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = D_1 f(x, y) = f_x(x, y) = D_x f(x, y) = \partial_x f(x, y) \\ f_2(x, y) &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = D_2 f(x, y) = f_y(x, y) = D_y f(x, y) = \partial_y f(x, y). \end{aligned}$$

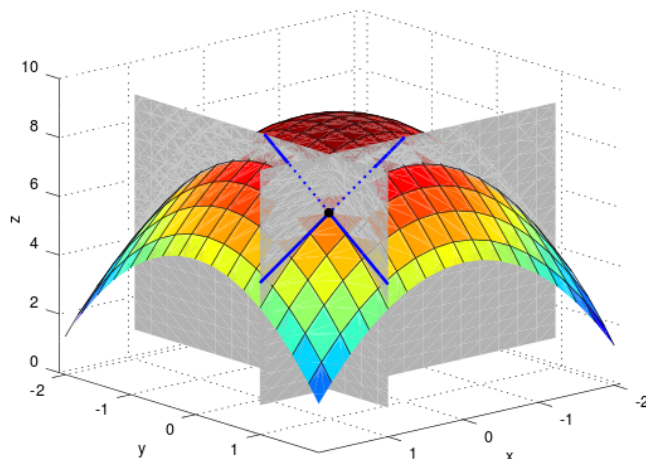
Þegar við viljum tákna gildið á hlutfleiðu f í ákveðnum punkti $(x, y) = (a, b)$ þá eru líka ýmsir möguleikar, til dæmis

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b)} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) \Big|_{(a,b)} = f_1(a, b) = D_1 f(a, b) \\ \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a,b)} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \Big|_{(a,b)} = f_2(a, b) = D_2 f(a, b). \end{aligned}$$

Aðvörun: Strangt til tekið merkir rithátturinn $\frac{\partial}{\partial x} f(a, b)$ að við stingum fyrst inn tölunum a og b og diffnum síðan með tilliti til x . En þar sem $f(a, b)$ er óháð x er útkoman 0.

4.12 Snertiplan

Látum $f(x, y)$ vera fall af tveimur breytistærðum þannig að hlutfleiðurnar $f_1(a, b)$ og $f_2(a, b)$ séu skilgreindar.



Í punktinum $(a, b, f(a, b))$ er

$\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b)\mathbf{k}$ snertivigur við ferilinn $f(x, b) = z$ og

$\mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b)\mathbf{k}$ snertivigur við ferilinn $f(a, y) = z$.

Táknum með S planið sem hefur stikunina

$$(a, b, f(a, b)) + s\mathbf{T}_1 + t\mathbf{T}_2, \quad -\infty < s, t < \infty.$$

Vigurinn

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

er þvervigur á S og jafna plansins S er

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

Þverlína á S hefur stikun

$$(a, b, f(a, b)) + u\mathbf{n}, \quad -\infty < u < \infty.$$

Ef $f(x, y)$ er 'nógu nálægt' (skilgreint nánar síðar) planinu S þegar (x, y) er nálægt punktinum (a, b) þá kallast S snertiplan við grafið $z = f(x, y)$ í punktinum $(a, b, f(a, b))$.

4.13 Hlutfleiður af hærra stigi

4.13.1 Skilgreining

Ritum $z = f(x, y)$. Annars stigs hlutfleiður f eru skilgreindar með formúlunum

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x, y) = f_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x, y) = f_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x, y) = f_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x, y) = f_{xy}(x, y).$$

Hlutfleiðurnar $f_{11}(x, y)$ og $f_{22}(x, y)$ kallast hreinar hlutfleiður og $f_{12}(x, y)$ og $f_{21}(x, y)$ kallast blandaðar hlutfleiður.

4.13.2 Setning

Látum $f(x, y)$ vera fall sem er skilgreint á opinni skífu D með miðju í $P = (a, b)$. Gerum ráð fyrir að hlutfleiðurnar $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_{12}(x, y)$ og $f_{21}(x, y)$ séu allar skilgreindar á D og að þær séu allar samfelldar á D . Þá gildir að

$$f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b).$$

4.13.3 Hugmynd að skilgreiningu

Skilgreiningu 5.6 má útvíkka á augljósan hátt til að skilgreina 2. stigs hlutfleiður fyrir föll af fleiri en tveimur breytum. Einnig er augljóst hvernig má skilgreina hlutfleiður af hærri stigum en 2, til dæmis ef $w = f(x, y, z)$ þá

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (\text{diffra fyrst tvisvar m.t.t. } y, \text{ svo einu sinni m.t.t. } x)$$

og

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z \partial y} \quad (\text{diffra fyrst m.t.t. } y, \text{ svo m.t.t. } z \text{ og að lokum m.t.t. } y).$$

4.13.4 Setning (Almenn útgáfa af Setningu 2.13.2)

Látum f vera fall n breytistærðum sem er skilgreint á opinni kúlu með miðju í $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Skoðum tvær hlutfleiður f í punktum P þar sem er diffrað með tilliti til sömu breytistærða og jafn oft með tilliti til hvernar breytistærðar. Ef þessar hlutfleiður eru samfelldar í punktinum P og allar hlutfleiður af lægra stigi eru skilgreindar á D og samfelldar á D þá eru hlutfleiðurnar sem við erum að skoða jafnar í P .

4.13.5 Dæmi:

Ef $w = f(x, y, z)$ er fall af þremur breytistærðum þá er t.d.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y \partial x \partial z}$$

ef skilyrðin í setningunni eru uppfyllt.

4.14 Keðjuregla

4.14.1 Setning (Keðjuregla í einni breytistærð.)

Við munum nú skoða nokkrar útgáfur af *keðjureglu* fyrir föll af mörgum breytistærðum. Gerum ráð fyrir að fallið $f(u)$ sé diffranlegt í punktinum $u = g(x)$ og að fallið $g(x)$ sé diffranlegt í punktinum x . Þá er fallið $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ diffranlegt í x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

4.14.2 Setning

Látum $f(x, y)$ vera fall þar sem $x = x(t)$ og $y = y(t)$ eru föll af breytu t . Gerum ráð fyrir að á opinni skífu um punktinum $(x(t), y(t))$ séu báðar fyrsta stigs hlutafleiður f skilgreindar og samfelldar. Gerum enn fremur ráð fyrir að föllin $x(t)$ og $y(t)$ séu bæði diffranleg í punktinum t . Þá er fallið

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

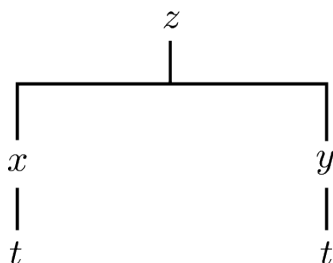
diffranlegt í t og

$$g'(t) = f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t).$$

4.14.3 Ritháttur

Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(t)$ og $y = y(t)$ eru föll af breytu t . Þá er

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$



4.14.4 Setning

Látum $f(x, y)$ vera fall af breytistærðum x og y sem aftur eru föll af breytum s og t , það er að segja $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$. Ritum svo

$$g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t)).$$

Þá gildir (að gefnum sambærilegum skilyrðum og í 2.14.2) að

$$g_1(s, t) = f_1(x(s, t), y(s, t))x_1(s, t) + f_2(x(s, t), y(s, t))y_1(s, t),$$

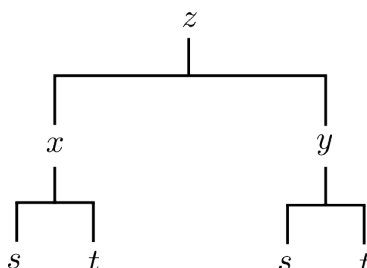
og

$$g_2(s, t) = f_1(x(s, t), y(s, t))x_2(s, t) + f_2(x(s, t), y(s, t))y_2(s, t).$$

4.14.5 Ritháttur

Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$ eru föll af breytum s og t . Þá er

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \text{og} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$



4.14.6 Ritháttur

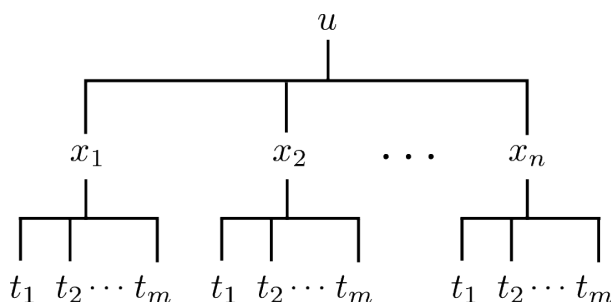
Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$ eru föll af breytum s og t . Þá er

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

4.14.7 Setning

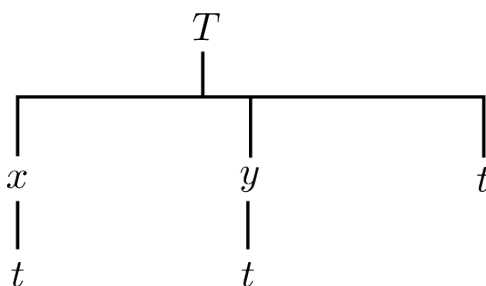
Látum u vera fall af n breytum x_1, x_2, \dots, x_n þannig að hvert x_i má rita sem fall af m breytum t_1, t_2, \dots, t_m . Gerum ráð fyrir að allar hlutfleiðurnar $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ og $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ séu til og samfelldar. Þegar u er skoðað sem fall af breytunum t_1, t_2, \dots, t_m fæst að

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_j}.$$



4.14.8 Dæmi

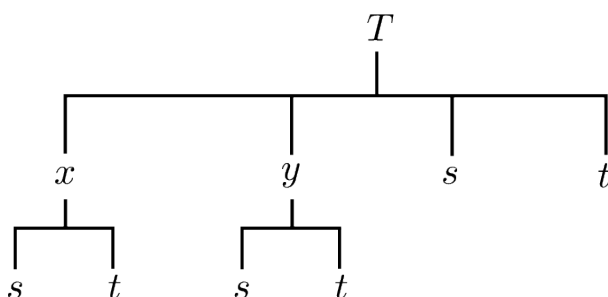
Látum T vera fall af fall af x, y og t , og x og y föll af t . Finnum $\frac{dT}{dt}$.



$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

4.14.9 Dæmi

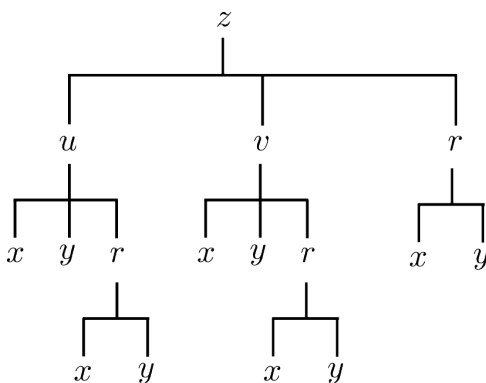
Látum T vera fall af fall af x, y, s og t , og x og y föll af s og t . Finnum $\frac{\partial T}{\partial t}$.



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x,y,s}.$$

4.14.10 Dæmi

Látum z vera fall af fall af u, v og r , u og v vera föll af x, y og r og r vera fall af x og y . Skrifum niður $\frac{\partial z}{\partial x}$.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}.$$

4.15 Diffranleiki í einni breytistærð

4.15.1 Skilgreining

Látum f vera fall af einni breytistærð og gerum ráð fyrir að f sé skilgreint á opnu bili sem inniheldur punktinn a . Fallið f er sagt vera *diffranlegt* í punkti a ef markgildið

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

er til.

4.16 Diffranleiki í einni breytistærð - önnur lýsing

4.16.1 Skilgreining

Látum f vera fall af einni breytistærð og gerum ráð fyrir að f sé skilgreint á opnu bili sem inniheldur punktinn a . Fallið f er sagt vera *diffranlegt* í punkti a ef til er tala m þannig að ef $L(x) = f(a) + m(x - a)$ þá er

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} = 0.$$

(Talan m verður að vera jöfn $f'(a)$.)

Fallið f er 'nálægt' línunni L nálægt punktinum a .

4.17 Diffranleiki

4.17.1 Skilgreining

Fall $f(x, y)$ sem er skilgreint á opinni skífu umhverfis (a, b) er sagt vera *diffranlegt* í punktinum (a, b) ef báðar fyrsta stigs hlutafleiður f eru skilgreindar í (a, b) og ef

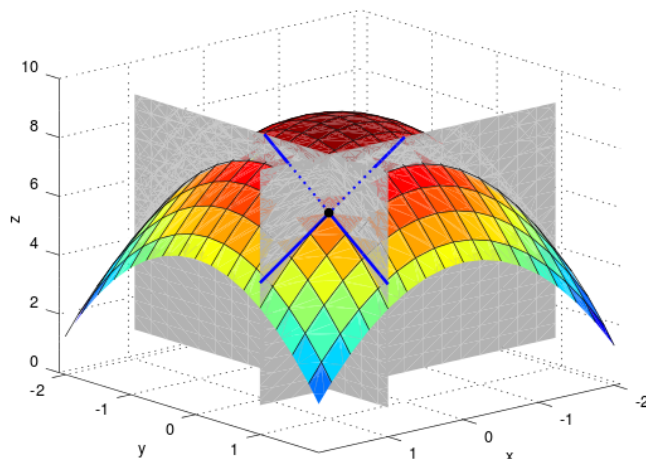
$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - S(a+h, b+k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

þar sem $S(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$.

Fallið f er 'nálægt' sléttunni S nálægt punktinum (a, b) .

4.18 Snertiplan

Ef f er diffranlegt í (a, b) þá kallast planið S *snertiplan* við graf fallsins.



$$S(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

4.19 Diffranleiki

4.19.1 Setning (Meðalgildissetningin)

Gerum ráð fyrir að fallið f sé samfellt á lokaða bilinu $[a, b]$ og diffranlegt á opna bilinu (a, b) . Þá er til punktur c á opna bilinu (a, b) þannig að

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

4.19.2 Setning

Látum $f(x, y)$ vera fall sem er skilgreint á opinni skífu \mathcal{D} með miðju í (a, b) þannig að á þessari skífu eru báðar fyrsta stigs hlutafleiður f skilgreindar og samfelldar. Gerum ráð fyrir að h og k séu tölur þannig að $(x+h, y+k) \in \mathcal{D}$. Þá eru til tölur θ_1 og θ_2 á milli 0 og 1 þannig að

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf_1(a + \theta_1 h, b + k) + kf_2(a, b + \theta_2 k).$$

4.19.3 Setning

Látum $f(x, y)$ vera fall sem er skilgreint á opinni skífu \mathcal{D} með miðju í (a, b) þannig að á þessari skífu eru báðar fyrsta stigs hlutafleiður f skilgreindar og samfelldar. Þá er fallið f diffranlegt í (a, b) .

4.19.4 Setning

Gerum ráð fyrir að $f(x, y)$ sé fall sem er diffranlegt í punktinum (a, b) . Þá er f samfellt í (a, b) .

4.19.5 Keðjuregla

Ritum $z = f(x, y)$ þar sem $x = x(s, t)$ og $y = y(s, t)$. Gerum ráð fyrir að

1. $x(a, b) = p$ og $y(a, b) = q$;
2. fyrsta stigs hlutafleiður $x(s, t)$ og $y(s, t)$ eru skilgreindar í punktinum (a, b) ;
3. fallið f er diffranlegt í punktinum (p, q) .

Þá eru fyrsta stigs hlutfleiður z með tilliti til breytanna s og t skilgreindar í punktinum (a, b) og um þær gildir að

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

og

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

4.20 Diffur

4.20.1 Skilgreining

Ritum $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Diffrið af z er skilgreint sem

$$dz = df = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n.$$

Diffrið er nálgun á

$$\Delta f = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

4.21 Varpanir $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$

4.21.1 Táknmál

Látum $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ tákna vörpun. Ritum $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ þar sem hvert f_i er fall $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Fyrir punkt í \mathbf{R}^n ritum við $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Síðan ritum við $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ þar sem $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ og

4.22 Jacobi-fylki

4.22.1 Skilgreining

Notum táknmálið úr 2.22.1. Ef allar hlutfleiðurnar $\partial y_i / \partial x_j$ eru skilgreindar í punktinum \mathbf{x} þá skilgreinum við *Jacobi-fylki* f í punktinum \mathbf{x} sem $m \times n$ fylkið

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

4.23 Diffranleiki varpana $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$

4.23.1 Skilgreining

Notum táknmálið úr 2.22.1 og 2.23.1. Látum $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vera fastan punkt í \mathbf{R}^n og ritum $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Vörpunin f er sögð diffranleg í punktinum \mathbf{a} ef

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Vörpunin f er 'nálægt' línulegu vörpuninni $D\mathbf{f}$ nálægt punktinum \mathbf{a} .

Línulega vörpunin $D\mathbf{f}$ kallast afleiða f .

4.24 Keðjuregla

4.24.1 Setning

Látum $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ og $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$ vera varpanir. Gerum ráð fyrir að vörpunin f sé diffranleg í punkti \mathbf{x} og vörpunin g sé diffranleg í punktinum $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Þá er samskeytta vörpunin $g \circ f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ diffranleg í \mathbf{x} og

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x}))Df(\mathbf{x}).$$

4.25 Stigull

4.25.1 Skilgreining

Látum $f(x, y)$ vera fall og (x, y) punkt þar sem báðar fyrsta stigs hlutafleiður f eru skilgreindar. Skilgreinum *stigul* f í punktinum (x, y) sem vigurinn

$$\nabla f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}.$$

Stigull f er stundum táknaður með **grad** f .

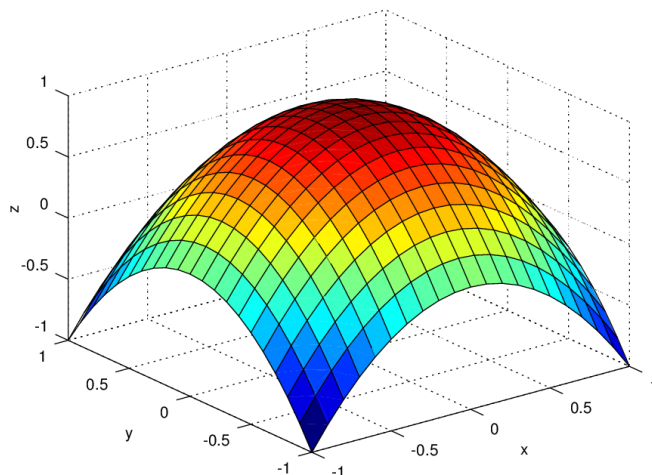
4.25.2 Ritháttur

Oft hentugt að rita

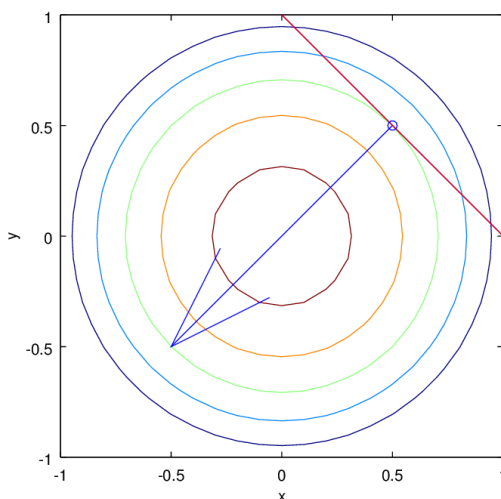
$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Þá er lítið svo á að ∇ sé *diffurvirki*, þ.e.a.s. ∇ gefur fyrirmæli um hvað á að gera við f til að fá $\nabla f(x, y)$.

4.26 Dæmi



Graf $z = 1 - x^2 - y^2$



Jafnhæðarlínur $z = 1 - x^2 - y^2$. Stigull og snertilína við jafnhæðarlínuna $z = 0.5$ í $(x, y) = (0.5, 0.5)$.

4.26.1 Setning

Gerum ráð fyrir að fallið $f(x, y)$ sé diffranlegt í punktinum (a, b) og að $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Þá er vigurinn $\nabla f(a, b)$ hornréttur á þá jafnhæðarlínu f sem liggur í gegnum punktinn (a, b) .

4.27 Snertilína við jafnhæðarferil

4.27.1 Setning

Gerum ráð fyrir að fallið $f(x, y)$ sé diffranlegt í punktinum (a, b) og að $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Jafna snertilínu við jafnhæðarferil f í punktinum (a, b) er gefin með formúlunni

$$\nabla f(a, b) \cdot (x, y) = \nabla f(a, b) \cdot (a, b),$$

eða

$$f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) = 0.$$

4.28 Stefnaafleiða

4.28.1 Skilgreining

Látum $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ vera einingarvigur. Stefnaafleiða f í punktinum (a, b) í stefnu \mathbf{u} er skilgreind sem

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + hu, b + hv) - f(a, b)}{h}$$

ef markgildið er skilgreint.

Aðvörun: Í skilgreiningunni á stefnaafleiðu er tekið einhliða markgildi. Berið það saman við skilgreiningu á hlutafleiðu þar sem markgildið er tvíhliða.

4.28.2 Setning

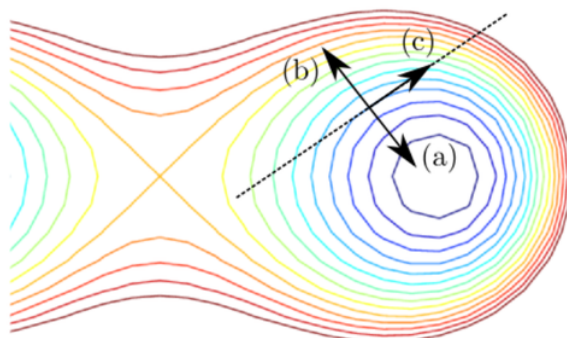
Gerum ráð fyrir að fallið f sé diffranlegt í (a, b) og $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ sé einingarvigur. Þá er stefnaafleiðan í punktinum (a, b) í stefnu \mathbf{u} skilgreind og gefin með formúlunni

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b).$$

4.28.3 Setning

Látum f vera gefið fall og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum (a, b) .

- (a) Hæsta gildið á stefnaafleiðunni $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ fæst þegar \mathbf{u} er einingarvigur í stefnu $\nabla f(a, b)$, þ.e.a.s. $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(a, b)}{|\nabla f(a, b)|}$.
- (b) Lægsta gildið á stefnaafleiðunni $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ fæst þegar \mathbf{u} er einingarvigur í stefnu $-\nabla f(a, b)$, þ.e.a.s. $\mathbf{u} = -\frac{\nabla f(a, b)}{|\nabla f(a, b)|}$.
- (c) Ef C er sú hæðarlína f sem liggur í gegnum (a, b) og \mathbf{u} er einingarsnertivigur við C í punktinum (a, b) þá er $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 0$.



4.28.4 Setning

Látum f vera gefið fall og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum (a, b) .

- (a) Í punktinum (a, b) þá vex f hraðast ef haldið er í stefnu $\nabla f(a, b)$.
 (b) Í punktinum (a, b) þá minnkar f hraðast ef haldið er í stefnu $-\nabla f(a, b)$.
 (c) Ef C er sú hæðarlína f sem liggur í gegnum (a, b) og \mathbf{u} er einingarsnertivigur við C í punktinum (a, b) þá er vaxtarhraði f í stefnu \mathbf{u} jafn 0.

4.29 Stigull (aftur)

4.29.1 Skilgreining

Látum f vera fall af þremur breytistærðum, þannig að allar þrjár fyrsta stigs hlutfleiður f í punktinum (x, y, z) séu skilgreindar. Stigull f í punktinum (x, y, z) er skilgreindur sem vigurinn

$$\nabla f(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

4.30 Snertiplan við jafnhæðarflöt

4.30.1 Setning

Látum f vera fall af þremur breytistærðum þannig að fallið f er diffranlegt í punktinum (a, b, c) . Látum \mathcal{F} tákna þann jafnhæðarflöt f sem liggur um (a, b, c) . Stigullinn $\nabla f(a, b, c)$ er hornréttur á flötinn \mathcal{F} í punktinum (a, b, c) og snertiplan (ef $\nabla f(a, b, c) \neq \mathbf{0}$) við jafnhæðarflötinn í punktinum (a, b, c) er gefið með jöfnunni

$$\nabla f(a, b, c) \cdot (x, y, z) = \nabla f(a, b, c) \cdot (a, b, c)$$

eða með umritun

$$f_1(a, b, c)(x - a) + f_2(a, b, c)(y - b) + f_3(a, b, c)(z - c) = 0.$$

4.31 Fólgin föll og Taylor-nálganir

4.31.1 Upprifjun

Skoðum feril sem gefinn er með jöfnu $F(x, y) = 0$ og gerum ráð fyrir að báðar fyrsta stigs hlutfleiður F séu samfelldar. Látum (x_0, y_0) vera punkt á ferlinum. Ef $F_2(x_0, y_0) \neq 0$ þá má skoða y sem fall af x í grennd við punktinn (x_0, y_0) og fallið $y = y(x)$ er diffranlegt í punktinum x_0 og afleiðan er gefin með formúlunni

$$y'(x_0) = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}.$$

Sagt að jafnan $F(x, y) = 0$ skilgreini y sem fölgid fall af x í grennd við (x_0, y_0) .

4.31.2 Setning

Látum F vera fall af n -breytum x_1, \dots, x_n og gerum ráð fyrir að allar fyrsta stigs hlutfleiður F séu samfelldar. Látum (a_1, \dots, a_n) vera punkt þannig að $F(a_1, \dots, a_n) = 0$. Ef $F_n(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ þá er til samfellt diffranlegt fall $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ skilgreint á opinni kúlu B utan um (a_1, \dots, a_{n-1}) þannig að

$$\varphi(a_1, \dots, a_{n-1}) = a_n$$

og

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$$

fyrir alla punkta (x_1, \dots, x_{n-1}) í B .

Ennfremur gildir að

$$\varphi_i(a_1, \dots, a_{n-1}) = -\frac{F_i(a_1, \dots, a_n)}{F_n(a_1, \dots, a_n)}.$$

4.31.3 Skilgreining

Jacobi-ákveða tveggja falla $u = u(x, y)$ og $v = v(x, y)$ með tilliti til breytanna x og y er skilgreind sem

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Ef F og G eru föll af breytum x, y, z, \dots þá skilgreinum við, til dæmis,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Ef við höfum föll F, G, H af breytum x, y, z, w, \dots þá skilgreinum við, til dæmis,

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(w, z, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial w} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial w} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial w} & \frac{\partial H}{\partial z} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

4.31.4 Setning (Upprifjun á reglu Cramers.)

Látum A vera andhverfanlegt $n \times n$ fylki og \mathbf{b} vigur í \mathbf{R}^n . Gerum ráð fyrir að $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sé lausn á $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Skilgreinum B_i sem $n \times n$ fylkið sem fæst með því að setja vigurinn \mathbf{b} í staðinn fyrir dálk i í A . Þá er

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}.$$

4.31.5 Setning (Setningin um fólgin föll)

Skoðum jöfnuhneppi

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0 \\ F_{(2)}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_{(n)}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0. \end{aligned}$$

Látum $P_0 = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$ vera punkt sem uppfyllir jöfnurnar. Gerum ráð fyrir að allar fyrsta stigs hlutafleiður fallanna $F_{(1)}, \dots, F_{(n)}$ séu samfelldar á opinni kúlu umhverfis P_0 og að

$$\left. \frac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|_{P_0} \neq 0.$$

Þá eru til föll $\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)$ á opinni kúlu B umhverfis (a_1, \dots, a_m) þannig að

$$\varphi_1(a_1, \dots, a_m) = b_1, \dots, \varphi_n(a_1, \dots, a_m) = b_n \quad \text{og}$$

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)) &= 0 \\ F_{(2)}(x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)) &= 0 \\ &\vdots \\ F_{(n)}(x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)) &= 0 \end{aligned}$$

fyrir alla punkta (x_1, \dots, x_m) í B . Enn fremur fæst að

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = - \frac{\frac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \dots, x_j, \dots, y_n)}}{\frac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \dots, y_n)}}.$$

4.31.6 Setning (Setningin um staðbundna andhverfu)

Látum

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

vera vörpun af n breytistærðum sem tekur gildi í \mathbf{R}^n og er skilgreind á opnu mengi í \mathbf{R}^n . Gerum ráð fyrir að allar fyrsta stigs hlutafleiður fallanna f_1, \dots, f_n séu samfelld föll. Ef Jacobi-fylkið $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ er andhverfanlegt í punkti \mathbf{x}_0 á skilgreiningarsvæði \mathbf{f} þá er til opin kúla $B_{\mathbf{X}}$ utan um \mathbf{x}_0 og opin kúla $B_{\mathbf{Y}}$ utan um $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ og vörpun $\mathbf{l} : B_{\mathbf{Y}} \rightarrow B_{\mathbf{X}}$ þannig að $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ fyrir alla punkta $\mathbf{x} \in B_{\mathbf{X}}$ og $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ fyrir alla punkta $\mathbf{y} \in B_{\mathbf{Y}}$.

4.31.7 Upprifjun (Taylor-regla í einni breytistærð.)

Látum f vera $n + 1$ -diffranlegt fall af einni breytistærð. Margliðan

$$P_{(n)}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

kallast n -ta stigs Taylor-margliða f með miðju í a . Til er punktur s á milli a og x þannig að

$$E_{(n)}(x) = f(x) - P_{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Fáum svo að

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{(n)}(x) + E_{(n)}(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \end{aligned}$$

sem er kallað n -ta stigs Taylor-formúla.

4.31.8 Skilgreining

Látum $f(x, y)$ vera fall þannig að fyrsta stigs hlutfleiður f eru skilgreindar og samfelldar. Margliðan

$$P_{(1)}(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

kallast fyrsta stigs Taylor-margliða f með miðju í (a, b) .

4.31.9 Skilgreining

Látum $f(x, y)$ vera fall þannig að fyrsta og annars stigs hlutfleiður f eru skilgreindar og samfelldar. Margliðan

$$\begin{aligned} P_{(2)}(x, y) &= f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{11}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{12}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{22}(a, b)(y - b)^2) \end{aligned}$$

kallast annars stigs Taylor-margliða f með miðju í (a, b) .

4.31.10 Skilgreining og athugasemd

Skilgreinum tvo *diffurvirkja* D_1 og D_2 þannig að

$$D_1 f(a, b) = f_1(a, b) \quad \text{og} \quad D_2 f(a, b) = f_2(a, b).$$

Athugið að ef hlutfleiður f af nógu háum stigum eru allar skilgreindar og samfelldar þá er $D_1 D_2 = D_2 D_1$, þ.e.a.s. ekki skiptir máli í hvaða röð er diffráð, bara hve oft er diffráð með tilliti til hvorrar breytu.

4.31.11 Upprifjun (Tvíliðuregla)

Skilgreinum

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Talan $\binom{n}{j}$ (lesið n yfir j) er $j + 1$ talan í $n + 1$ línu Pascals-þríhyrningsins. Höfum að

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

4.31.12 Regla

Ef $f(x, y)$ er fall þannig að allar hlutfleiður af n -ta og lægri stigum eru samfelldar þá gildir að

$$(hD_1 + kD_2)^n f(a, b) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} h^j k^{n-j} D_1^j D_2^{n-j} f(a, b).$$

4.31.13 Skilgreining

Fyrir fall $f(x, y)$ þannig að allar hlutfleiður af n -ta og lægri stigum eru samfelldar þá er n -ta stigs Taylor-margliða f með miðju í punktinum (a, b) skilgreind sem margliðan

$$\begin{aligned} P_{(n)}(x, y) &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} ((x-a)D_1 + (y-b)D_2)^m f(a, b) \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{1}{m!} \binom{m}{j} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b) (x-a)^j (y-b)^{m-j} \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b) (x-a)^j (y-b)^{m-j}. \end{aligned}$$

4.31.14 Setning

Fyrir fall $f(x, y)$ þannig að allar hlutfleiður af $n + 1$ -ta og lægri stigum eru samfelldar þá gildir um skekkjuna í n -ta stigs Taylor-nálgun að til er tala θ á milli 0 og 1 þannig að ef $h = x - a$ og $k = y - b$ þá er

$$f(x, y) - P_{(n)}(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} (hD_1 + kD_2)^{n+1} f(a + \theta h, b + \theta k).$$

Old stories are like old friends, she used to say. You have to visit them from time to time.

-George R.R. Martin, A Storm of Swords

5.1 Útgildi

5.1.1 Skilgreining

Látum f vera fall af tveim breytum skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f)$.

Sagt er að f hafi *staðbundið lágildi* í punkti (a, b) ef til er tala $r > 0$ þannig að $f(a, b) \leq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in B_r(a, b) \cap \mathcal{D}(f)$.

Sagt er að f hafi *staðbundið hágildi* í punkti (a, b) ef til er tala $r > 0$ þannig að $f(a, b) \geq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in B_r(a, b) \cap \mathcal{D}(f)$.

Í þeim punktum þar sem f tekur annað hvort staðbundið lágildi eða staðbundið hágildi er sagt að f hafi *staðbundið útgildi*.

Ef $f(a, b) \leq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ þá er sagt að f taki *lægsta gildi* í (a, b) (e. global minimum).
Ef $f(a, b) \geq f(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ þá er sagt að f taki *hæsta gildi* í (a, b) .

5.2 Staðbundið útgildi

5.2.1 Upprifjun

Látum f vera fall af einni breytu skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Ef fallið f hefur staðbundið útgildi í punkti a þá gildir eitt af þrennu um a :

1. $f'(a) = 0$. (punkturinn a kallast *stöðupunktur* f).
2. Afleiðan $f'(a)$ er ekki skilgreind.
3. Punkturinn a er *jaðarpunktur* $\mathcal{D}(f)$.

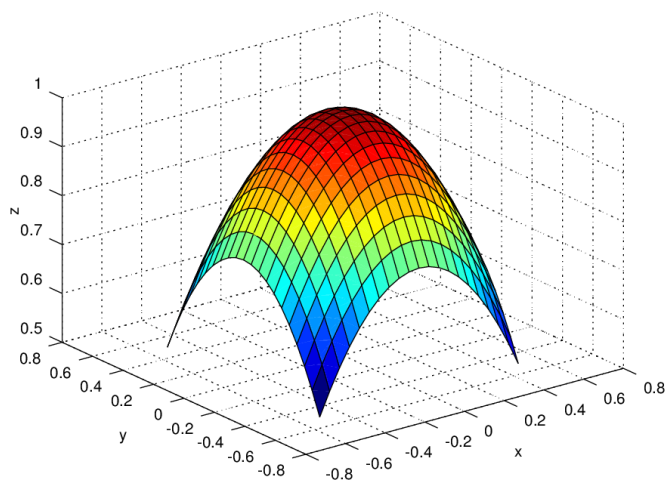
5.2.2 Setning

Látum f vera fall af tveim breytum skilgreint á mengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Ef fallið f hefur staðbundið útgildi í punkti (a, b) þá gildir eitt af þrennu um a

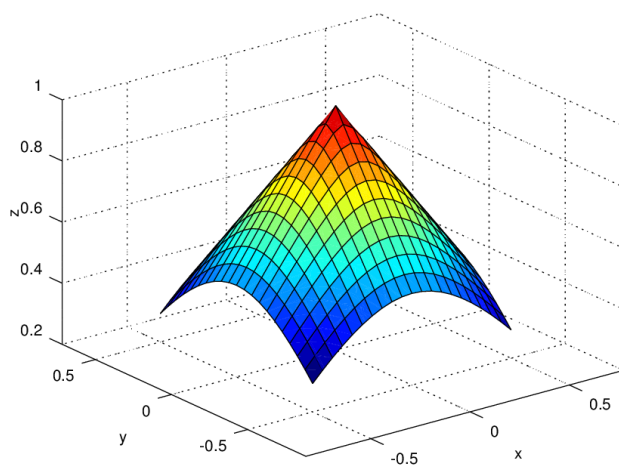
1. $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. (punkturinn (a, b) kallast *stöðupunktur* f)
2. Stigullinn $\nabla f(a, b)$ er ekki skilgreindur.
3. Punkturinn (a, b) er *jaðarpunktur* $\mathcal{D}(f)$.

5.2.3 Dæmi

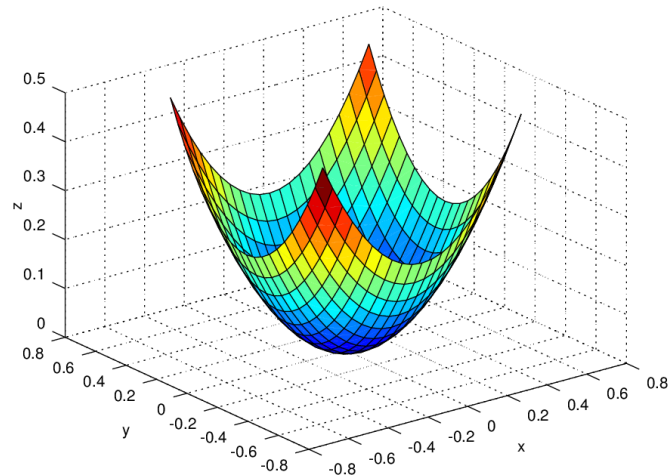
Föll skilgreind á svæðinu $-0.5 \leq x \leq 0.5$, $-0.5 \leq y \leq 0.5$. Hvar eru staðbundin hágildi?



$$z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$$



$$z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$



$$z = f(x, y) = x^2 + y^2.$$

5.3 Tilvist útgilda

5.3.1 Setning

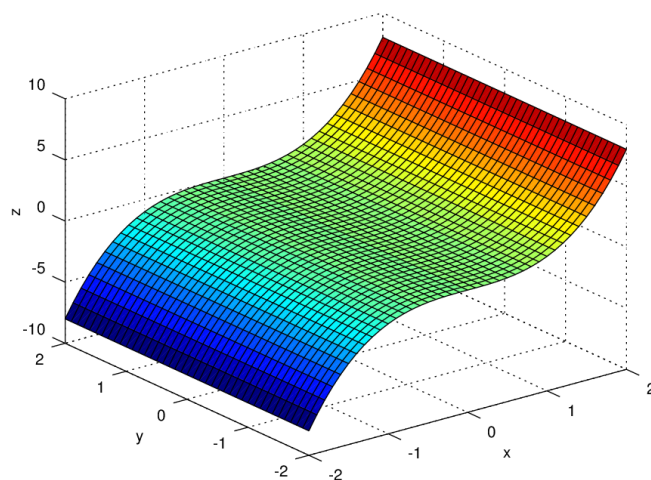
Látum f vera samfelld fall af tveim breytum skilgreint á lokuðu og takmörkuðu mengi $\mathcal{D}(f)$. Fallið f tekur þá bæði hæsta og lágsta gildi.

5.4 Söðulpunktur

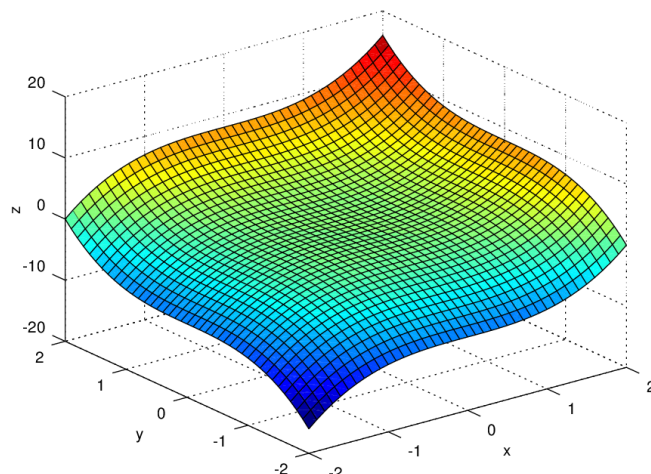
5.4.1 Skilgreining

Punktur $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ sem er ekki jaðarpunktur kallast *söðulpunktur* ef $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ en f hefur ekki staðbundið útgildi í (x, y) .

Dæmi um föll með söðulpunkta.



$$z = f(x, y) = x^3.$$



$$z = f(x, y) = x^3 + y^3.$$

5.5 Staðbundið útgildi

5.5.1 Upprifjun

Látum f vera fall af einni breytistærð og gerum ráð fyrir að f' sé samfellt fall. Gerum einnig ráð fyrir að $f'(a) = 0$. Þá gildir:

1. Ef $f''(a) > 0$ þá hefur f staðbundið lágildi í a .
2. Ef $f''(a) < 0$ þá hefur f staðbundið hágildi í a .
3. Ef $f''(a) = 0$ þá gæti verið staðbundið lágildi í A , það gæti verið staðbundið hágildi í a eða það gætu verið beygjuskil í a , alltsvo. ekkert hægt að segja.

5.6 Hesse-fylki

5.6.1 Skilgreining

Látum f vera fall af n breytum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og gerum ráð fyrir að allar 2. stigs hlutfleiður f séu skilgreindar í punktinum \mathbf{x} . Skilgreinum Hesse-fylki f í punktinum \mathbf{x} sem $n \times n$ -fylkið

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & f_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}) \\ f_{21}(\mathbf{x}) & f_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{x}) & f_{n2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

5.7 Ferningsform (sjá kafla 10.7 í Adams)

5.7.1 Upprifjun

Ferningsform Q af n -breytum x_1, x_2, \dots, x_n er einsleit margliða af stigi 2 gefin með

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

þar sem A er samhverft $n \times n$ fylki með tölu a_{ij} í sæti (i, j) og $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

5.7.2 Skilgreining

Ferningsform Q af n -breytum er sagt vera *jákvætt ákvarðað* ef $Q(\mathbf{x}) > 0$ fyrir alla vigra $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ í \mathbf{R}^n .

Sagt að ferningsformið Q sé *neikvætt ákvarðað* ef $Q(\mathbf{x}) < 0$ fyrir alla vigra $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ í \mathbf{R}^n .

Síðan er sagt að ferningsformið Q sé *óákvarðað* ef $Q(\mathbf{x}) < 0$ fyrir einhvern vigur \mathbf{x} og $Q(\mathbf{y}) > 0$ fyrir einhvern vigur \mathbf{y} .

5.7.3 Setning

Látum Q vera fernings form af n breytum og A samhverft $n \times n$ fylki þannig að $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ fyrir alla vigra \mathbf{x} ,

1. Ferningsformið er jákvætt ákvarðað ef og aðeins ef öll *eigingildi* A eru jákvæð.
2. Ferningsformið er neikvætt ákvarðað ef og aðeins ef öll *eigingildi* A eru neikvæð.
3. Ferningsformið er óákvarðað ef og aðeins ef A hefur bæði jákvæð og neikvæð *eigingildi*

5.8 Staðbundið útgildi

5.8.1 Setning

Látum f vera fall af n breytum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ þannig að allar 1. og 2. stigs hlutfleiður f eru samfelldar. Látum \mathbf{a} vera innri punkt á skilgreiningarsvæði f og gerum ráð fyrir að $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Þá gildir: Ef $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ er

1. ... jákvætt ákvarðað þá hefur f *staðbundið lágildi* í \mathbf{a} .
2. ... neikvætt ákvarðað þá hefur f *staðbundið hágildi* í \mathbf{a} .
3. ... óákvarðað þá hefur f *söðulpunkt* í \mathbf{a} .
4. ... hvorki jákvætt ákvarðað, neikvætt ákvarðað né óákvarðað þá nægja upplýsingarnar sem felast í jöfnunni $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ og Hesse-fylkinu ekki til að segja til um hvers eðlis stöðupunkturinn \mathbf{a} er.

5.8.2 Fylgisetning

Látum f vera fall af tveim breytum þannig að 1. og 2. stigs hlutfleiður f eru samfelldar. Látum (a, b) vera innri punkt á skilgreiningarsvæði f og gerum ráð fyrir að $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. Setjum

$$A = f_{11}(a, b), \quad B = f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b) \quad C = f_{22}(a, b).$$

Þá gildir:

1. Ef $B^2 - AC < 0$ og $A > 0$ þá hefur f *staðbundið lágildi* í (a, b) .
2. Ef $B^2 - AC < 0$ og $A < 0$ þá hefur f *staðbundið hágildi* í (a, b) .
3. Ef $B^2 - AC > 0$ þá hefur f *söðulpunkt* í (a, b) .
4. Ef $B^2 - AC = 0$ þá er ekkert hægt að segja.

5.9 Ferningsform

5.9.1 Regla

Ef A er samhverft $n \times n$ fylki með tölu a_{ij} í sæti (i, j) og

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

þá gildir

1. Ef $D_i > 0$ fyrir $1 \leq i \leq n$ þá er A jákvætt ákvarðað.
2. Ef $D_i > 0$ fyrir slétt i í $\{1, 2, \dots, n\}$ og $D_i < 0$ fyrir oddatölu i í $\{1, 2, \dots, n\}$ þá er A neikvætt ákvarðað.
3. Ef $\det(A) = D_n \neq 0$ en hvorki 1 né 2 gilda þá er A :hover:~óákvarðað,.
4. Ef $\det(A) = 0$ þá er A hvorki jákvætt né neikvætt ákvarðað en getur verið óákvarðað.

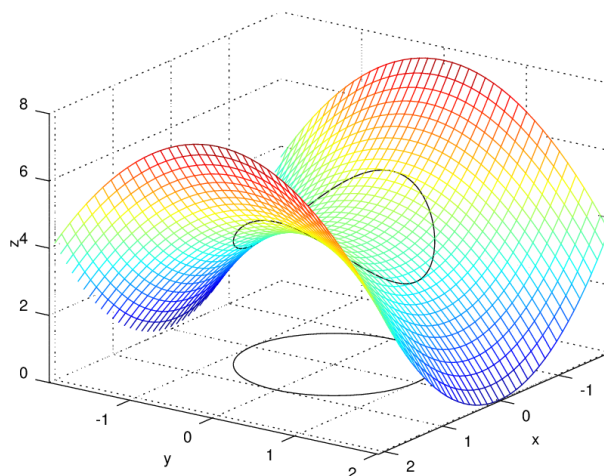
5.10 Útgildi falla þar sem breytur uppfylla skorðujöfnur

5.10.1 Sérstækar aðferðir

Finna skal útgildi falls $f(x, y)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu $g(x, y) = 0$.

1. Er mögulegt að einangra x eða y í jöfnunni $g(x, y) = 0$?
 - Ef hægt er að einangra y og rita $y = h(x)$ þá snýst verkefnið nú um að finna útgildi falls $f(x, h(x))$ af einni breytu x .
2. Er hægt að stika ferilinn $g(x, y) = 0$?
 - Ef r er stikun á ferlinum þá þurfum við að leita að útgildum fallsins $f(\mathbf{r}(t))$ þar sem er bara ein breyta.

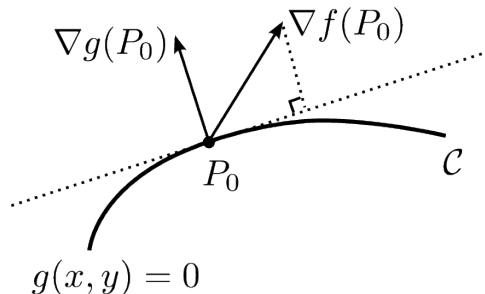
5.10.2 Dæmi



Hver eru hæstu og lægstu gildi fallsins $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$ á menginu $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$?

5.10.3 Setning

Látum f og g vera föll sem eru bæði diffranleg í punktinum $P_0 = (x_0, y_0)$ sem liggur á ferlinum $g(x, y) = 0$, og er ekki endapunktur ferilsins. Gerum ráð fyrir að $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Gerum líka ráð fyrir að ef við einskorðum fallið f við ferilinn $g(x, y) = 0$ þá hafi f staðbundið útgildi í P_0 . Þá eru stíglarnir $\nabla f(x_0, y_0)$ og $\nabla g(x_0, y_0)$ samsíða.



Ef stíglarnir $\nabla g(P_0)$ og $\nabla f(P_0)$ eru ekki samsíða þá vex f eða minnkar þegar farið er eftir C út frá punktinum P_0 .

5.11 Lagrange-margfaldarar

5.11.1 Reikniaðferð

Finna skal útgildi falls $f(x, y)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu $g(x, y) = 0$.

Búum til *Lagrange-fallið*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Stöðupunktur L , þ.e.a.s. punktar (x_0, y_0, λ_0) þar sem $\nabla L(x_0, y_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$, gefa mögulega punkta (x_0, y_0) þar sem f tekur útgildi.

Þessir punktar finnast með því að leysa jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} f_1(x, y) + \lambda g_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Talan λ nefnist *Lagrange-margfaldari*.

5.11.2 Regla

Finna skal útgildi falls $f(x, y)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y) sem uppfylla jöfnu $g(x, y) = 0$.

Athuga þarf punkta sem uppfylla eitt af eftirfarandi skilyrðum:

1. *Stöðupunktur* $L(x, y, \lambda)$.
2. Punktar (x, y) þar sem $\nabla g(x, y) = \mathbf{0}$
3. Punktar (x, y) þar sem annar eða báðir stíglanna $\nabla g(x, y)$ og $\nabla f(x, y)$ eru ekki skilgreindir.
4. „Endapunktur“ ferilsins $g(x, y) = 0$.

5.11.3 Reikniaðferð

Finna skal *útgildi* falls $f(x, y, z)$ þegar skilgreiningarsvæði f er mengi þeirra punkta (x, y, z) sem uppfylla jöfnurnar $g(x, y, z) = 0$ og $h(x, y, z) = 0$.

Búum til Lagrange-fallið

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z).$$

Stöðupunktur L , þ.e.a.s. punktar $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ þar sem $\nabla L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) = \mathbf{0}$ gefa mögulega punkta (x_0, y_0, z_0) þar sem f tekur *útgildi*.

Þessir punktar finnast með því að leysa jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu h_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) + \lambda g_2(x, y, z) + \mu h_2(x, y, z) &= 0 \\ f_3(x, y, z) + \lambda g_3(x, y, z) + \mu h_3(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \\ h(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

A bruise is a lesson... and each lesson makes us better.

- George R.R. Martin, A Game of Thrones

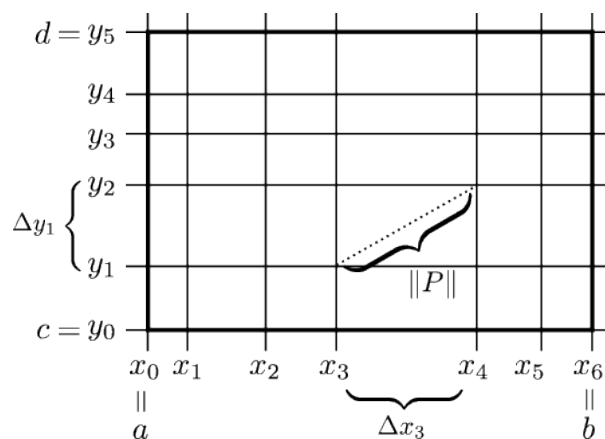
6.1 Skiptingar

6.1.1 Skilgreining

Látum $R = [a, b] \times [c, d]$ vera rétthyrning í planinu. *Skipting* P á rétthyrningnum R felst í því að taka skiptingar

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{og} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

á bilunum $[a, b]$ og $[c, d]$ og nota þær skiptingar til að skipta R upp í rétthyrninga $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Ritum $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ og $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. *Norm* skiptingarinnar P , táknað með $\|P\|$, er skilgreint sem lengd lengstu hornalínu í rétthyrningunum $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.



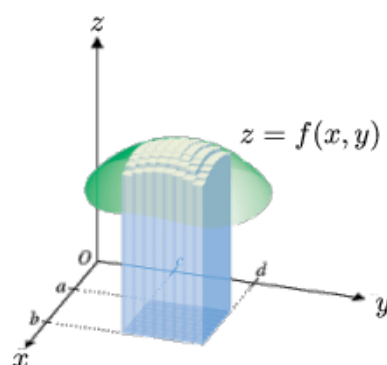
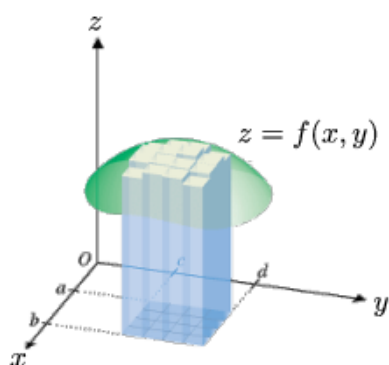
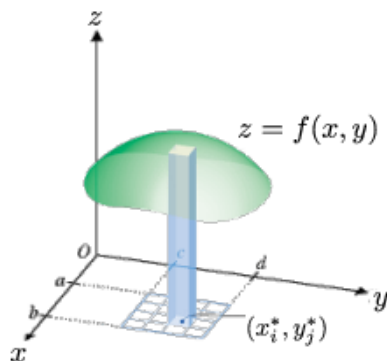
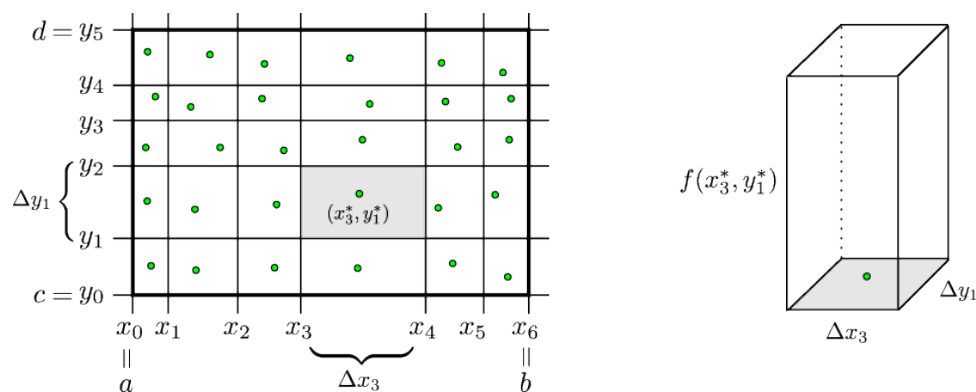
Skipting P á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$.

6.2 Riemann-summa

6.2.1 Skilgreining

Látum f vera fall skilgreint á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$ og látum P vera skiptingu á R . Veljum úr hverjum rétthyrningi $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ punkt (x_i^*, y_j^*) . Skilgreinum Riemann-summuna

$$\mathcal{R}(f, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j.$$



6.3 Tvöfalt heildi yfir rétthyrning

6.3.1 Skilgreining

Sagt er að fall f skilgreint á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$ sé heildanlegt yfir R með heildi I (hér stendur I fyrir tölu) ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að $|\mathcal{R}(f, P) - I| < \varepsilon$ fyrir allar skiptingar P með $\|P\| < \delta$ óháð vali á punktum (x_i^*, y_j^*) .

Ritum þá

$$\iint_R f(x, y) dA = I.$$

6.4 Tvöfalt heildi yfir takmarkað svæði

6.4.1 Skilgreining

Látum D vera takmarkað svæði í planinu. Fall f er sagt *heildanlegt* yfir D ef til er rétthyrningur R sem inniheldur D og fallið

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{ef } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{ef } (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

er heildanlegt yfir R .

6.4.2 Setning

Látum f vera samfellt fall skilgreint á lokuðu og takmörkuðu svæði D í planinu \mathbb{R}^2 . Gerum ráð fyrir að jaðar D samanstandi af endanlega mörgum ferlum sem hafa endanlega lengd. Þá er fallið f *heildanlegt* yfir D .

6.4.3 Setning

Látum D vera svæði í planinu og f takmarkað fall skilgreint á D og *heildanlegt* yfir D . Þá gildir:

1. $\iint_D f(x, y) dA = 0$ ef flatarmál D er 0.
2. $\iint_D 1 dA = \text{flatarmál } D$.
3. Ef $f(x, y) \geq 0$ fyrir alla punkta (x, y) í D þá er $\iint_D f(x, y) dA$ jafnt rúmmáli rúmskikans sem liggur milli D og grafsins $z = f(x, y)$.
4. Ef $f(x, y) \leq 0$ fyrir alla punkta (x, y) í D þá er $\iint_D f(x, y) dA$ jafnt mínus rúmmáli rúmskikans sem liggur milli D og grafsins $z = f(x, y)$.

6.4.4 Setning

Ef D er svæði í planinu og f og g heildanleg föll yfir D þá gildir:

1. Ef L og M eru fastar þá er

$$\iint_D Lf(x, y) + Mg(x, y) dA = L \iint_D f(x, y) dA + M \iint_D g(x, y) dA.$$

2. Ef $f(x, y) \leq g(x, y)$ þá er

$$\iint_D f(x, y) dA \leq \iint_D g(x, y) dA.$$

3. Þríhyrningsójafna:

$$\left| \iint_D f(x, y) dA \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dA.$$

1. Ritum D sem sammengi af svæðum D_1, \dots, D_k sem skarast ekki nema mögulega í jaðarpunktum þá er

$$\iint_D f(x, y) dA = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(x, y) dA.$$

6.4.5 Setning Fubinis

Látum f vera jákvætt fall sem er heildanlegt á rétthyrningi $R = [a, b] \times [c, d]$. Setjum

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (x \text{ hugsað sem fasti þegar heildað}).$$

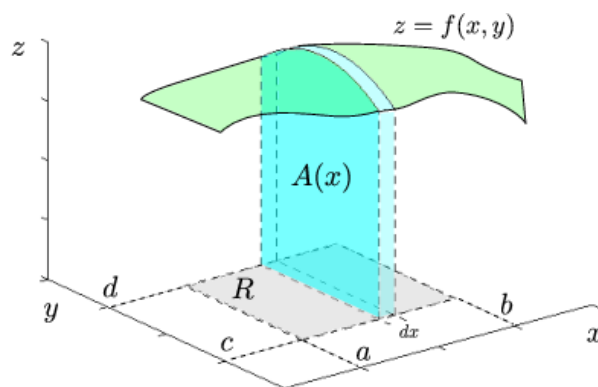
Þá gildir að

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Sömuleiðis gildir þegar við setjum

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (y \text{ hugsað sem fasti þegar heildað}) \quad \text{að}$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$



Athugasemd: Setning Fubinis er stundum kölluð brauðsneiðareglan. Ef við ímyndum okkur að rúmskikinn sem liggur milli graf jákvæðs falls og xy -sléttunnar sé brauðhleifur, þá má reikna rúmmál hans með því að skera hann í næfurþunnar brauðsneiðar sem liggja samsíða annað hvort x -ás eða y -ás, reikna svo rúmmál hverrar brauðsneiðar fyrir sig og leggja saman.

6.5 x -einföld og y -einföld svæði

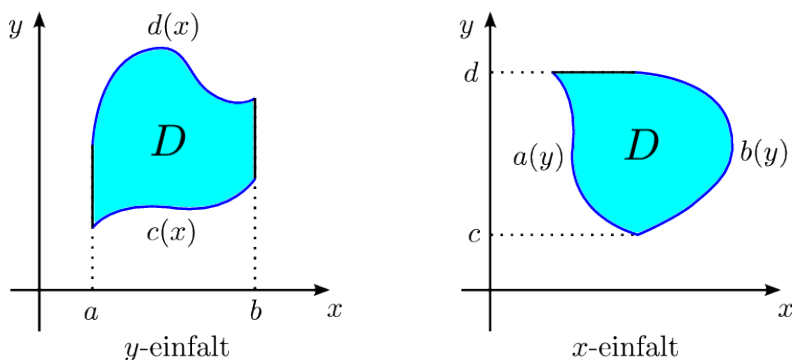
6.5.1 Skilgreining

Svæði D í planinu er sagt vera y -einfalt ef hægt er að finna tölur a og b og föll $c(x)$ og $d(x)$ þannig að

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}.$$

Svæði D í planinu er sagt vera x -einfalt ef hægt er að finna tölur c og d og föll $a(y)$ og $b(y)$ þannig að

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}.$$



6.5.2 Regla

Lokað og takmarkað svæði D í planinu er y -einfalt ef og aðeins ef sérhver lína af gerðinni $x = x_0$ sker D í línustriki.

Lokað og takmarkað svæði D er x -einfalt ef og aðeins ef sérhver lína af gerðinni $y = y_0$ sker svæðið í línustriki.

6.6 Heildi yfir x -einföld og y -einföld svæði

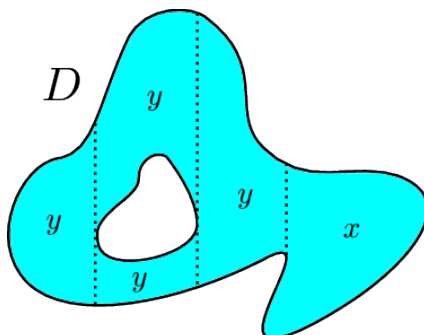
6.6.1 Setning

Látum $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ vera y -einfalt svæði og $f(x, y)$ jákvætt fall sem er heildanlegt yfir D . Þá er

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx.$$

Látum $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$ vera x -einfalt svæði og $f(x, y)$ jákvætt fall sem er heildanlegt yfir D . Þá er

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy.$$



Hér er svæðinu D skipt í endanlega mörg x -einföld og y -einföld svæði sem skarast eingöngu í punktum á jaðrinum.

6.7 Óeiginleg heildi

6.7.1 Umræða

Látum $f(x, y) \geq 0$ vera jákvætt fall sem er skilgreint á svæði D í sléttunni. Ef

1. D er ótakmarkað svæði eða
2. $f(x, y)$ er ótakmarkað á D

má í sumum tilfellum skilgreina tvöfalda heildið af f yfir D .

Það er gert með því að finna fyrst runu af stækkanði lokuðum og takmörkuðum mengjum $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots \subseteq D$ sem 'stefnir á' D . Ef

$$\iint_{D_n} f(x, y) dA$$

er vel skilgreint fyrir öll n og hefur markgildi þegar $n \rightarrow \infty$ (fyrir allar ólíkar runur $(D_n)_{n \geq 1}$) þá skilgreinum við *óeiginlega heildið*

$$\iint_D f(x, y) dA := \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dA.$$

6.7.2 Skilgreining

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir svæði D í \mathbb{R}^2 . *Meðalgildi* fallsins f á D er skilgreint sem talan

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{flatarmál } D} \iint_D f(x, y) dA.$$

6.7.3 Skilgreining

Segjum að mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sé *ferilsamanhangandi* (e. path-connected) ef fyrir sérhverja tvo punkta $P, Q \in D$ gildir að til er stikaferill $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow D$ þannig að $\mathbf{r}(0) = P$ og $\mathbf{r}(1) = Q$.

Aðvörun: Í bók er orðið *connected* notað fyrir hugtakið *ferilsamanhangandi*. Venjulega er orðið *connected* notað yfir annað hugtak, skylt en samt ólíkt.

6.7.4 Setning (*Meðalgildissetning fyrir tvöföld heildi*)

Gerum ráð fyrir að f sé samfelld fall sem er skilgreint á lokuðu, takmörkuðu og ferilsamanhangandi svæði D í \mathbb{R}^2 . Þá er til punktur (x_0, y_0) í D þannig að

$$\frac{1}{\text{flatarmál } D} \iint_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0).$$

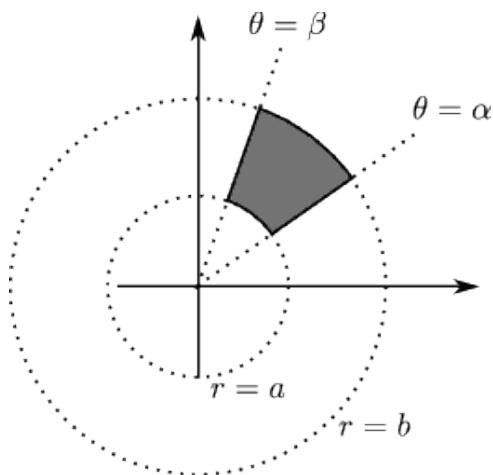
6.8 Breytuskipti

6.8.1 Upprifjun

Látum $P = (x, y) \neq \mathbf{0}$ vera punkt í plani. *Pólhnit* P er talnarpár $[r, \theta]$ þannig að r er fjarlægð P frá $O = (0, 0)$ og θ er hornið á milli striksins \overline{OP} og x -ássins. (Hornið er mælt þannig að rangsælis stefna telst jákvæð, og leggja má við θ heil margfeldi af 2π .)

6.8.2 Skilgreining

Pólhnitarréttirningur í xy -planinu er svæði sem afmarkast af tveimur hringbogum $x^2 + y^2 = a^2$ og $x^2 + y^2 = b^2$ og tveimur hálfínnum sem byrja í $(0, 0)$ og mynda hornin α og β við x -ásinn (Hornin eru mæld þannig að rangsælis stefna telst jákvæð.)



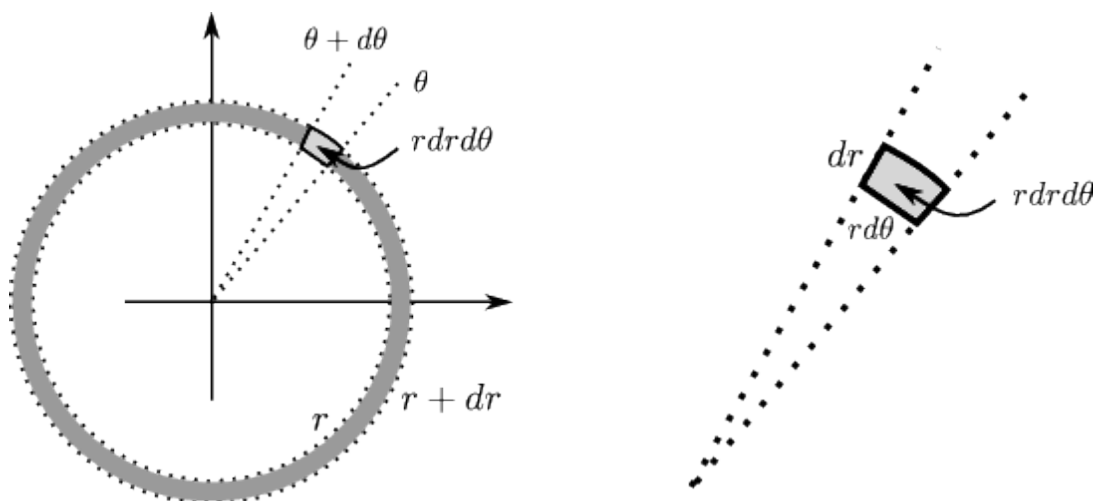
Gerum ráð fyrir að $0 \leq a \leq b$ og að $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Þá má lýsa pólhnitarréttirningnum með því að nota pólhnit þannig að

$$D = \{[r, \theta] \mid 0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

6.8.3 Setning

Ef f er fall sem er heildanlegt yfir pólhnitarréttirning $D = \{[r, \theta] \mid 0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ þá er

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$



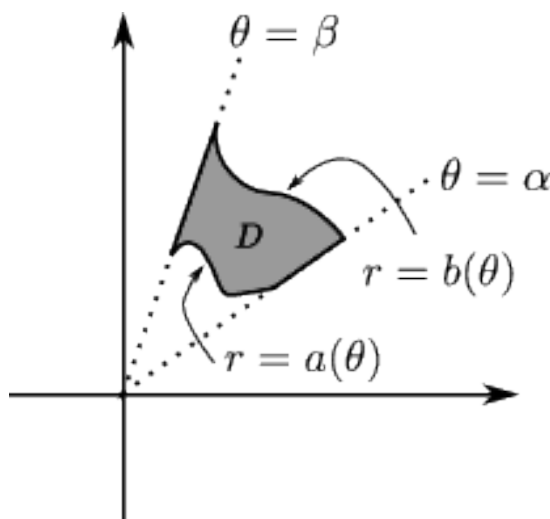
6.8.4 Upprifjun

Látum f vera fall skilgreint á bili $[\alpha, \beta]$. Jafnan $r = f(\theta)$ lýsir mengi allra punkta í planinu sem hafa pólhnit á forminu $[f(\theta), \theta]$ þar sem $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Þetta mengi kallast pólhnitagraf fallsins f .

6.8.5 Setning

Látum D vera svæði í xy -plani sem afmarkast af pólnhitalínunum $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ og tveimur pólnhitaþrófum $r = a(\theta)$ og $r = b(\theta)$. Gerum ráð fyrir að $0 \leq a(\theta) \leq r \leq b(\theta)$ og $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Ef f er heildanlegt fall yfir D þá er

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$



6.8.6 Regla

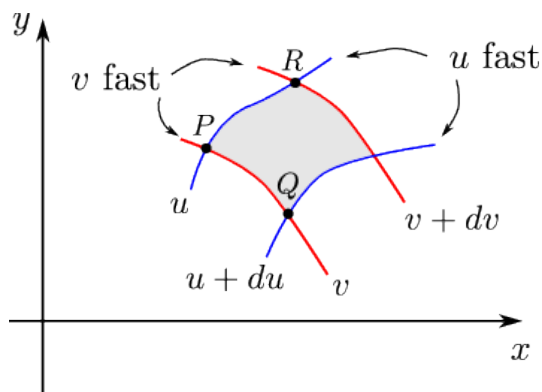
Hugsum okkur að $f(x, y)$ sé fall og hægt sé að rita $f(x, y) = g(x)h(y)$. Látum $R = [a, b] \times [c, d]$. Þá er

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_a^b \int_c^d g(x)h(y) dy dx \\ &= \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right). \end{aligned}$$

6.8.7 Setning (Almenn breytuskiptaregla fyrir tvöföld heildi)

Látum $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ vera gagntæka vörpun milli svæðis S í uv -plani og svæðis D í xy -plani. Gerum ráð fyrir að föllin $x(u, v)$, $y(u, v)$ hafi samfelldar fyrsta stigs hlutfleiður á S . Ef f er heildanlegt fall yfir D , þá er fallið $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ heildanlegt yfir S og

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_S g(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$



$$\overline{PQ} = \frac{\partial x}{\partial u} du \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} du \mathbf{j}$$

$$\overline{PR} = \frac{\partial x}{\partial v} dv \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} dv \mathbf{j}$$

$$dA = |\overline{PQ} \times \overline{PR}|$$

$$= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

6.9 Preföld heildi

6.9.1 Umræða

Heildi falls $f(x, y, z)$ yfir kassa $K = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ í \mathbb{R}^3 er skilgreint á sambærilegan hátt og tvöfalt heildi er skilgreint.

Á sama hátt og fyrir tvöföld heildi má svo skilgreina heildi fyrir almennari rúmskika.

Heildi falls $f(x, y, z)$ yfir rúmskika R er táknað með

$$\iiint_R f(x, y, z) dV.$$

(dV stendur fyrir að heildað er með tilliti til rúmmáls.)

6.9.2 Setning

Látum $f(x, y, z)$ vera fall sem er heildanlegt yfir kassa $K = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ í \mathbb{R}^3 . Þá er

$$\iiint_K f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x, y, z) dz dy dx.$$

Breyta má röð heilda að vild, t.d. er

$$\iiint_K f(x, y, z) dV = \int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz.$$

6.9.3 Setning

Látum $f(x, y, z)$ vera fall sem er heildanlegt yfir rúmskika R og gerum ráð fyrir að R hafi lýsingu á forminu

$$R = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}.$$

Þá er

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Breyturnar x, y, z geta svo skipt um hlutverk.

6.9.4 Setning (Almenn breytuskiptaformúla fyrir þreföld heildi.)

Látum

$$(u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

vera gagntæka vörpun milli rúmskika R í xyz -rúmi og rúmskika S í uvw -rúmi. Gerum ráð fyrir að föllin $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ hafi öll samfelldar fyrsta stigs hlutafleiður. Ef $f(x, y, z)$ er fall sem er heildanlegt yfir R þá er

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dV \\ = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

6.9.5 Skilgreining

Látum (x, y, z) vera punkt í \mathbb{R}^3 . *Sívalningshnit* (x, y, z) eru þrennd talna r, θ, z þannig að

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z.$$

Athugasemd: Athugið að $[r, \theta]$ eru pólhnit punktsins (x, y) .

6.9.6 Setning (Breytuskipti yfir í sívalningshnit.)

Látum R vera rúmskika í \mathbb{R}^3 og látum $f(x, y, z)$ vera heildanlegt fall yfir R . Gerum ráð fyrir að R megi lýsa með eftirfarandi skorðum á sívalningshnit punktanna sem eru í R

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \quad a(\theta) \leq r \leq b(\theta), \quad u(r, \theta) \leq z \leq v(r, \theta),$$

þar sem $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Þá er

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \int_{u(r, \theta)}^{v(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta.$$

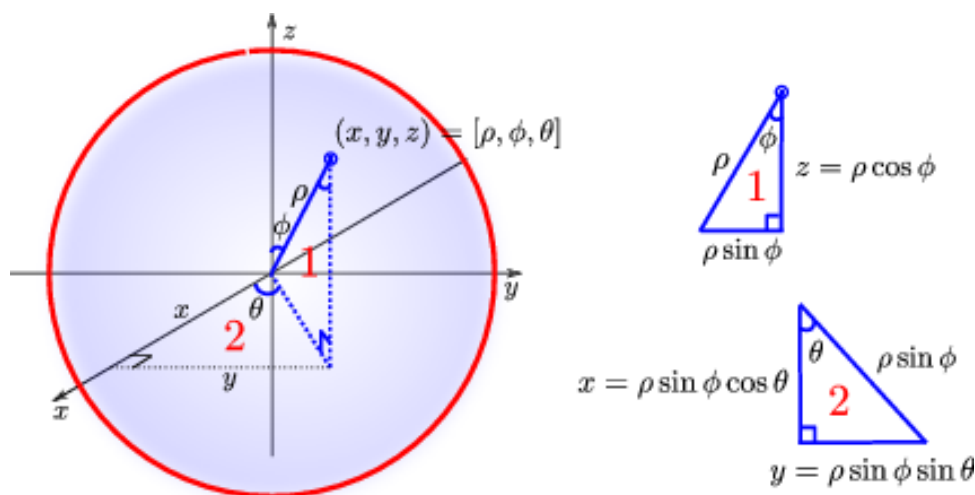
6.10 Kúluhnit

6.10.1 Skilgreining

Látum (x, y, z) vera punkt í \mathbb{R}^3 . *Kúluhnit* (x, y, z) eru þrennd talna ρ, φ, θ þannig að

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Punktur sem hefur kúluhnit ρ, φ, θ er táknaður með $[\rho, \varphi, \theta]$.



6.10.2 Umræða

Eftirfarandi jöfnur gefa aðferð til að finna kúlunhit:

- ρ er fjarlægðin frá $(0, 0, 0)$ til (x, y, z) , það er að segja

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- φ er hornið á milli jákvæða hluta z -ássins og línustriksins frá $(0, 0, 0)$ til (x, y, z) . Hornið φ má ákvarða út frá jöfnunni

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

- θ er hornið sem jákvæði hluti x -ásins myndar við línustrikið frá $(0, 0, 0)$ til $(x, y, 0)$ (sama horn og notað í sívalningshnitum (og pólhnitum)). Hornið θ má finna út frá jöfnunni

$$\tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Um kúlunhit $[\rho, \varphi, \theta]$ fyrir punkt (x, y, z) gildir að velja má ρ, φ, θ þannig að $0 \leq \rho, 0 \leq \varphi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

6.11 Breytuskipti í kúlunhit

6.11.1 Setning

Látum R vera rúmskika þannig að þegar notuð eru kúlunhit þá fæst eftirfarandi lýsing

$$R = \{[\rho, \varphi, \theta] \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \varphi \leq d, a \leq \rho \leq b\}.$$

Ef f er fall sem er heildanlegt yfir R þá er

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dV &= \\ \int_{\alpha}^{\beta} \int_c^d \int_a^b f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

6.12 Massamiðja

6.12.1 Regla

Látum D tákna svæði í pláni. Hugsum D sem plötu þ.a. í punkti (x, y) er efnisþéttleikinn gefinn með falli $\delta(x, y)$. Massi plötunnar er

$$m = \iint_D \delta(x, y) dA.$$

Vægi plötunnar um línuna $x = 0$ (þ.e. y -ás) og um línuna $y = 0$ (þ.e. x -ás) eru gefin með

$$M_{x=0} = \iint_D x\delta(x, y) dA \quad \text{og} \quad M_{y=0} = \iint_D y\delta(x, y) dA.$$

Hnit massamiðju plötunnar eru (\bar{x}, \bar{y}) þar sem

$$\bar{x} = \frac{M_{y=0}}{m} \quad \text{og} \quad \bar{y} = \frac{M_{x=0}}{m}.$$

6.12.2 Regla

Látum R tákna rúmskika. Hugsum R sem hlut þannig að í punkti (x, y, z) er efnisþéttleikinn gefinn með falli $\delta(x, y, z)$. Massi hlutarins er

$$m = \iiint_R \delta(x, y, z) dV.$$

Vægi hlutarins um planið $x = 0$ (þ.e. yz -planið) er

$$M_{x=0} = \iiint_R x\delta(x, y, z) dV.$$

Svipað skilgreinum við

$$M_{y=0} = \iiint_R y\delta(x, y, z) dV \quad \text{og} \quad M_{z=0} = \iiint_R z\delta(x, y, z) dV.$$

Hnit massamiðju hlutarins eru $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ þar sem

$$\bar{x} = \frac{M_{y=0}}{m} \quad \text{og} \quad \bar{y} = \frac{M_{x=0}}{m} \quad \text{og} \quad \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m}.$$

6.13 Hverfitregða

6.13.1 Regla

Látum R tákna rúmskika. Hugsum R sem hlut þannig að í punkti (x, y, z) er efnisþéttleikinn gefinn með falli $\delta(x, y, z)$. Látum L tákna línu (snúningssás) í rúminu. Hverfitregða hlutarins um L er

$$I = \iiint_R D^2 \delta dV$$

þar sem $\delta = \delta(x, y, z)$ og $D = D(x, y, z)$ er fjarlægð punktsins (x, y, z) frá L .

6.14 Yfirborðsflatarmál

6.14.1 Regla

Látum D vera svæði í plani og $f(x, y)$ diffranlegt fall skilgreint á D . Flatarmál grafsins $z = f(x, y)$ þar sem $(x, y) \in D$ er gefið með formúlunni

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_1(x, y)^2 + f_2(x, y)^2} dA.$$

Different roads sometimes lead to the same castle.

-George R.R. Martin, A Game of Thrones

7.1 Vigursvið

7.1.1 Skilgreining

Vigursvið á \mathbb{R}^2 er vörpun

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y) \mathbf{i} + F_2(x, y) \mathbf{j}.$$

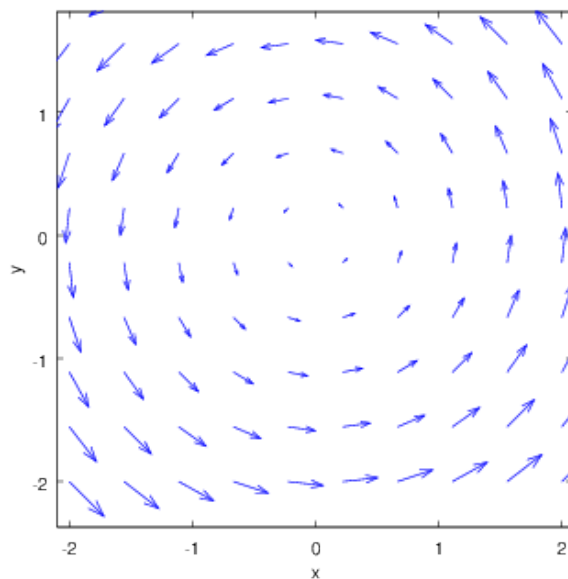
Þegar talað er um vigursvið þá hugsum við vigurinn $\mathbf{F}(x, y)$ sem vigur í \mathbb{R}^2 sem hefur fótþpunkt í punktinum (x, y) .

Vigursvið $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y) \mathbf{i} + F_2(x, y) \mathbf{j}$ er sagt *samfelld* ef föllin $F_1(x, y)$ og $F_2(x, y)$ eru samfelld.

Vigursvið á \mathbb{R}^3 er vörpun

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \mathbf{i} + F_2(x, y, z) \mathbf{j} + F_3(x, y, z) \mathbf{k}.$$

Við hugsum $\mathbf{F}(x, y, z)$ sem vigur með (x, y, z) sem fótþpunkt. Skilgreiningin á því að vigursvið í \mathbb{R}^3 sé samfelld er eins og á samfeldni vigursvið í \mathbb{R}^2 .

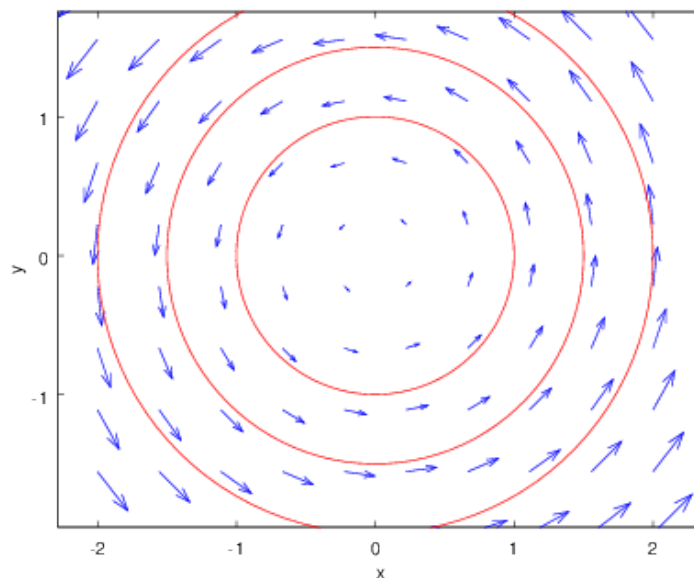


Vigursviðið $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

7.2 Straumlína

7.2.1 Skilgreining

Ferill C í planinu kallast *straumlína* fyrir vigursvið $\mathbf{F}(x, y)$ ef í hverjum punkti (x, y) á ferlinum er vigurinn $\mathbf{F}(x, y)$ snertivigur við ferilinn.



Vigursviðið $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ásamt nokkrum straumlínum.

7.3 Stigulsvið

7.3.1 Skilgreining

Vigursvið $\mathbf{F}(x, y)$ kallast *stigulsvið* eða *geymið svið* (e. gradient field, conservative field) á mengi D ef til er fall $\varphi(x, y)$ þannig að

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$$

fyrir alla punkta $(x, y) \in D$, það er að segja ef

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y) \mathbf{i} + F_2(x, y) \mathbf{j}$$

þá er

$$F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) \quad \text{og} \quad F_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y).$$

Vigursvið $\mathbf{F}(x, y, z)$ kallast *stigulsvið* eða *geymið svið* ef til er fall $\varphi(x, y, z)$ þannig að $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$.

Fallið φ kallast *mætti* fyrir vigursviðið \mathbf{F} .

7.3.2 Setning

Látum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y) \mathbf{i} + F_2(x, y) \mathbf{j}$ vera vigursvið þannig að föllin $F_1(x, y)$ og $F_2(x, y)$ hafi samfelldar hlutfleiður. Ef $\mathbf{F}(x, y)$ er stigulsvið þá er

$$\frac{\partial}{\partial y}F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x, y).$$

Athugasemd: Þó að hlutfleiðurnar séu jafnar þá er **ekki** hægt að álykta að \mathbf{F} sé stigulsvið. Þetta atriði verður rætt síðar.

7.3.3 Setning

Látum $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \mathbf{i} + F_2(x, y, z) \mathbf{j} + F_3(x, y, z) \mathbf{k}$ vera vigursvið þannig að föllin $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ og $F_3(x, y, z)$ hafi samfelldar hlutfleiður. Ef $\mathbf{F}(x, y, z)$ er stigulsvið þá er

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}F_1(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}F_2(x, y, z), \\ \frac{\partial}{\partial z}F_1(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}F_3(x, y, z) \quad \text{og} \\ \frac{\partial}{\partial z}F_2(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}F_3(x, y, z). \end{aligned}$$

7.3.4 Reikniaðferð

Finna á *mætti* $\varphi(x, y)$ fyrir stigulsvið $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y) \mathbf{i} + F_2(x, y) \mathbf{j}$. Viljum finna fall $\varphi(x, y)$ þannig að

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) = F_1(x, y) \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) = F_2(x, y).$$

Með því að heilda þessar jöfnur fæst að

$$\varphi(x, y) = \int F_1(x, y) dx + C_1(y)$$

og

$$\varphi(x, y) = \int F_2(x, y) dy + C_2(x).$$

Þegar fyrra stofnfallið er reiknað þá er y hugsað sem fasti og því fæst heildunarfasti sem getur verið fall af y . Loka-skrefið er svo að horfa á jöfnurnar tvær hér að ofan og sjá hvort ekki er hægt að finna gildi fyrir heildunarfastanna $C_1(x)$ og $C_2(y)$ þannig að sama formúlan fyrir $\varphi(x, y)$ fáiast.

7.4 Heildi falls yfir feril

7.4.1 Skilgreining

Látum C vera feril í \mathbb{R}^2 stikaðan af samfelldum diffranlegum stikaferli $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ritum $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Heildi falls $f(x, y)$ yfir ferilinn C með tilliti til bogalengdar er skilgreint sem

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

Sama aðferð notuð til að skilgreina heildi falls yfir feril í \mathbb{R}^3 .

7.4.2 Setning

Látum C vera feril í \mathbb{R}^2 . Gerum ráð fyrir að \mathbf{r}_1 og \mathbf{r}_2 séu tveir samfelldum diffranlegir stikaferlar sem báðir stika ferilinn C . Ef fall $f(x, y)$ er heildað yfir C þá fæst sama útkoma hvort sem stikunin \mathbf{r}_1 eða stikunin \mathbf{r}_2 er notuð við útreikningana.

7.4.3 Skilgreining

Ferill C í plani er sagður *samfelldur diffranlegur á köflum* ef til er stikun $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ á C þannig að til eru punktar $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$ þannig að á hverju bili (t_i, t_{i+1}) er \mathbf{r} *samfelldur diffranlegur ferill* og *markgildin*

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} \mathbf{r}'(t) \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} \mathbf{r}'(t)$$

eru bæði til.

Líka sagt að stikaferillinn \mathbf{r} sé *samfelldur diffranlegur á köflum*.

7.5 Heildi vigursviðs eftir ferli

7.5.1 Skilgreining

Látum $\mathbf{F}(x, y)$ vera vigursvið og $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stikun á ferli \mathcal{C} og gerum ráð fyrir að stikaferillinn \mathbf{r} sé samfelldur og diffralegur á köflum. Heildi vigursviðsins $\mathbf{F}(x, y)$ eftir ferlinum \mathcal{C} er skilgreint sem

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

7.5.2 Skilgreining

Ritum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$. Ritum líka $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Þá má rita $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$. Með því að nota þennan rithátt fæst að

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x(t), y(t))\mathbf{j}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}) dt \\ &= \int_a^b F_1(x(t), y(t))x'(t) dt + F_2(x(t), y(t))y'(t) dt \\ &= \int_{\mathcal{C}} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy. \end{aligned}$$

Athugasemd: Látum \mathcal{C} vera feril í \mathbb{R}^2 . Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{r}_2 : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ séu tveir samfelldir og diffralegir á köflum stikaferlar sem stika \mathcal{C} . Gerum enn fremur ráð fyrir að $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(b')$ og $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(a')$ (þ.e.a.s. stikaferlarnir fara í sitthvora áttina eftir \mathcal{C}). Þá gildir ef $\mathbf{F}(x, y)$ er vigursvið að

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

(Ef breytt er um stefnu á stikun á breytist formerki þegar vigursvið heildað eftir ferlinum.)

7.6 Ferilheildi og stigulsvið

7.6.1 Setning

Látum $\mathbf{F}(x, y)$ vera samfelld stigulsvið skilgreint á svæði D í \mathbb{R}^2 og látum φ vera fall skilgreint á D þannig að $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$ fyrir alla punkta $(x, y) \in D$. Látum $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$ vera stikaferill sem er samfelldur og diffralegur á köflum og stikar feril \mathcal{C} í D . Þá er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(b)) - \varphi(\mathbf{r}(a)).$$

(Samsvarandi gildir fyrir vigursvið skilgreint á svæði $D \subseteq \mathbb{R}^3$.)

7.6.2 Fylgisetning

Látum \mathbf{F} vera samfelld stigulsvið skilgreint á mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Látum $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$ vera stikaferil sem er samfelldur og diffralegur á köflum og lokaður (þ.e.a.s. $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$) og stikar feril \mathcal{C} . Þá er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

(Ath. að rithátturinn

$$\oint_C$$

er gjarnan notaður þegar heildað er yfir lokaðan feril C .)

7.6.3 Fylgisetning

Látum \mathbf{F} vera samfelld stigulsvið skilgreint á mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Látum $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow D$ og $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \rightarrow D$ vera stikaferla sem eru samfelld diffranlegir á köflum og stika ferlana C_1 og C_2 . Gerum ráð fyrir að $\mathbf{r}_1(a_1) = \mathbf{r}_2(a_2)$ og $\mathbf{r}_1(b_1) = \mathbf{r}_2(b_2)$, þ.e.a.s. stikaferlarnir \mathbf{r}_1 og \mathbf{r}_2 hafa sameiginlega upphafs- og endapunkta. Þá er

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

7.6.4 Skilgreining

Segjum að heildi vigursviðs \mathbf{F} sé óháð stikaferli ef fyrir sérhverja tvo samfelld diffranlega á köflum stikaferla \mathbf{r}_1 og \mathbf{r}_2 með sameiginlega upphafs- og endapunkta sem stika ferlana C_1 og C_2 gildir að

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

7.6.5 Setning

Ferilheildi samfellds vigursviðs \mathbf{F} er óháð stikaferli ef og aðeins ef $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ fyrir alla lokaða ferla C sem eru samfelld diffranlegir á köflum.

7.6.6 Upprifjun

Segjum að mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sé ferilsamanhangandi (e. connected, path-connected) ef fyrir sérhverja tvo punkta $P, Q \in D$ gildir að til er stikaferill $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow D$ þannig að $\mathbf{r}(0) = P$ og $\mathbf{r}(1) = Q$.

7.6.7 Setning

Látum D vera opið mengi í \mathbb{R}^2 sem er ferilsamanhangandi. Ef \mathbf{F} er samfelld vigursvið skilgreint á D og ferilheildi \mathbf{F} eru óháð vegi þá er \mathbf{F} stigulsvið.

7.6.8 Setning

Fyrir samfelld vigursvið \mathbf{F} skilgreint á opnu ferilsamanhangandi mengi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er eftirfarandi jafngilt:

1. \mathbf{F} er stigulsvið,
 2. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ fyrir alla samfelld diffranlega á köflum lokaða stikaferla \mathbf{r} í D ,
 3. Ferilheildi \mathbf{F} er óháð vegi.
1. \Rightarrow (b). Fylgisetning 5.6.2.
 2. \Leftrightarrow (c). Setning 5.6.5.
 3. \Rightarrow (a). Setning 5.6.7.

7.7 Fletir

7.7.1 Óformleg skilgreining

Flötur \mathcal{S} í \mathbb{R}^3 er „tvívítt hlutmengi í \mathbb{R}^3 “.

7.7.2 Lýsing

Flötum er aðallega lýst með formúlum á þrjá vegu:

1. Gefið er fall $f(x, y, z)$. Fletinum \mathcal{S} er lýst með jöfnu $f(x, y, z) = C$ (þ.e.a.s. \mathcal{S} er *jafnhæðarflötur* fallsins f). Þá er

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = C\}.$$

2. Gefið er fall skilgreint á ferilsamanhangandi svæði D í \mathbb{R}^2 . Fletinum \mathcal{S} er lýst sem grafi fallsins f . Þá er

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \text{ og } z = f(x, y)\}.$$

3. Með stikafleti (sjá næstu grein).

7.8 Stikafletir

7.8.1 Skilgreining

Látum D vera ferilsamanhangandi hlutmengi í \mathbb{R}^2 . Samfelld vörpun $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ þannig að

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$$

er flötur kallast *stikaflötur*. Segjum að \mathbf{r} sé *stikun á fletinum* \mathcal{S} . Viljum að \mathbf{r} sé eintæk vörpun, nema hugsanlega á jaðri D . Ritum einnig

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

7.9 Snertiplön

7.9.1 Setning

1. Látum \mathcal{S} vera flöt sem er gefinn sem *jafnhæðarflötur* $f(x, y, z) = C$. Ef (a, b, c) er punktur á fletinum og fallið f er diffranlegt í punktinum (a, b, c) þá er vigurinn $\mathbf{n} = \nabla f(a, b, c)$ hornréttur á flötinn í punktinum (a, b, c) og ef $\nabla f(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ þá hefur flöturinn *snertiplan* í punktinum. Jafna snertiplansins er

$$f_1(a, b, c)x + f_2(a, b, c)y + f_3(a, b, c)z = D$$

þar sem

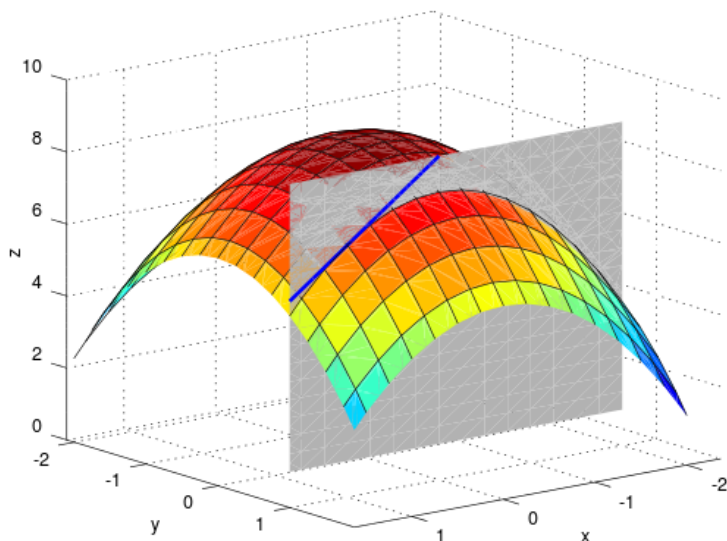
$$D = f_1(a, b, c)a + f_2(a, b, c)b + f_3(a, b, c)c.$$

2. Látum S vera flöt sem er gefinn sem graf falls $z = f(x, y)$. Ef $(a, b, f(a, b))$ er punktur á fletinum og fallið f er diffranlegt í punktinum (a, b) þá er vigurinn

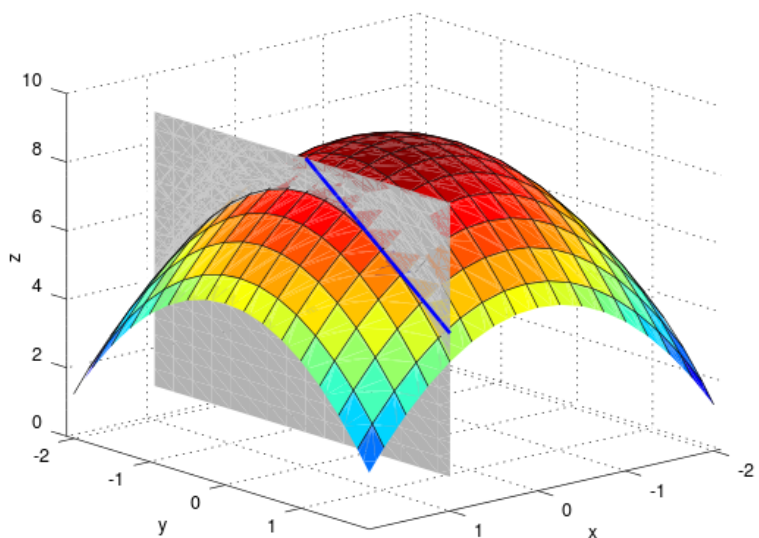
$$\mathbf{n} = (0, 1, f_2(a, b)) \times (1, 0, f_1(a, b)) = (f_1(a, b), f_2(a, b), -1)$$

hornréttur á flötinn í punktinum $(a, b, f(a, b))$ og flöturinn hefur snertiplan í punktinum. Jafna snertiplansins er

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$



Snertivigur við skurðferil sléttunnar $y = b$ og yfirborðsins $z = f(x, y)$ í punktinum $(a, b, f(a, b))$ er $\mathbf{T}_1 = (1, 0, f_1(a, b))$.



Snertivigur við skurðferil sléttunnar $x = a$ og yfirborðsins $z = f(x, y)$ í punktinum $(a, b, f(a, b))$ er $\mathbf{T}_2 = (0, 1, f_2(a, b))$.

3. Látum $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vera stikafliöt. Ef $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ er punktur á fletinum sem $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ stikar og föllin $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ eru diffranleg í punktinum (x_0, y_0) þá er

vigurinn

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

reiknaður með $u = u_0$ og $v = v_0$ þvervigur á flötinn í punktinum (x_0, y_0, z_0) .

7.9.2 Skilgreining

Ef vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ eru óháðir fyrir alla punkta $(u, v) \in D$ þá er sagt að stikunin sé *regluleg*.

Athugasemd: Ef vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ eru óháðir þá spanna þeir snertiplan við flötinn í punktinum $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Snertiplanið hefur stikun

$$\Pi(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + u \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) + v \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

7.10 Flatarheildi

7.10.1 Verkefni

1. Flatarmál flata – sambærilegt við bogalengd ferla.
2. Heildi falls yfir flöt með tilliti til flatarmáls – sambærilegt við heildi falls eftir ferli með tilliti til bogalengdar.
3. Heildi vigursviðs yfir flöt – svipar til heildis vigursviðs eftir ferli.

7.11 Flatarmál flata

7.11.1 Skilgreining

Látum $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vera reglulegan stikaflöt sem stikar flöt \mathcal{S} . Flatarmál \mathcal{S} er

$$A = \iint_D dS = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

7.11.2 Formúla

Látum $f(x, y)$ vera diffranlegt fall skilgreint á mengi D í \mathbb{R}^2 . Flatarmál grafsins $z = f(x, y)$ er gefið með formúlunni

$$A = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

7.11.3 Skilgreining

Látum $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vera reglulegan stikaflöt sem stikar flöt \mathcal{S} . Flatarmál \mathcal{S} er

$$A = \iint_D dS = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

7.11.4 Formúla

Látum $f(x, y)$ vera diffranlegt fall skilgreint á mengi D í \mathbb{R}^2 . Flatarmál grafsins $z = f(x, y)$ er gefið með formúlunni

$$A = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

7.11.5 Formúlur

Ritum dS fyrir flatarmáselement á fleti S .

- Ef $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er stikun á S þá er

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv.$$

- Ef S er graf $z = g(x, y)$ þá er

$$dS = \sqrt{1 + g_1(x, y)^2 + g_2(x, y)^2} dx dy.$$

- Gerum ráð fyrir að flöturinn S í \mathbb{R}^3 hafi þann eiginleika að ofanvarp hans á xy -planið sé eintækt eða með öðrum orðum hægt er að lýsa fletinum sem grafi $z = f(x, y)$. Ef \mathbf{n} er þvervigur á flötinn og γ er hornið sem þvervigurinn \mathbf{n} myndar við jákvæða hluta z -ássins þá er

$$dS = \left| \frac{1}{\cos \gamma} \right| dx dy = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} dx dy.$$

Í þessu tilviki gildir einnig að ef S er lýst sem hæðarfleti $G(x, y, z) = C$ þá er

$$dS = \left| \frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3(x, y, z)} \right| dx dy.$$

7.11.6 Skilgreining

Látum $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vera reglulega stikun á fleti S . Heildi falls $f(x, y, z)$ yfir flötinn S með tilliti til flatarmáls er

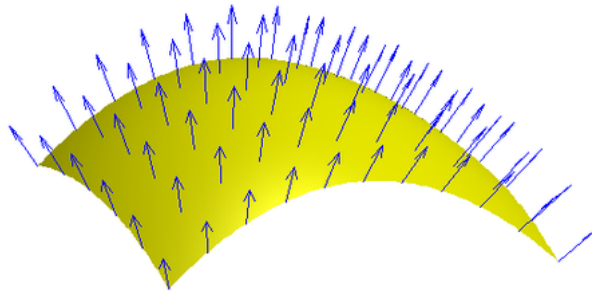
$$\iint_S f dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv.$$

7.12 Einingarþvervigrasvið

7.12.1 Skilgreining

Látum S vera flöt í \mathbb{R}^3 sem hefur snertiplan í punkti P . Einingarþvervigur \mathbf{n} á flötinn S í punktinum P er einingarvigur hornréttur á snertiplan við flötinn í punktinum P .

Einingarþvervigrasvið á S er samfelld vigursvið \mathbf{N} sem er skilgreint í öllum punktum S þannig að fyrir $(x, y, z) \in S$ er vigurinn $\mathbf{n}(x, y, z)$ einingarvigur sem er hornréttur á snertiplan við flötinn í punktinum (x, y, z) .

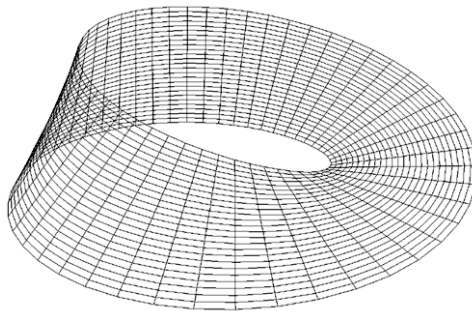


7.13 Áttanlegir fletir

7.13.1 Skilgreining

Flöturinn \mathcal{S} er sagður *áttanlegur* ef til er einingarþvigrasvið \mathbf{N} á \mathcal{S} .

Áttun á áttanlegum fleti felst í því að velja annað af tveimur mögulegum einingarþvigrasviðum.

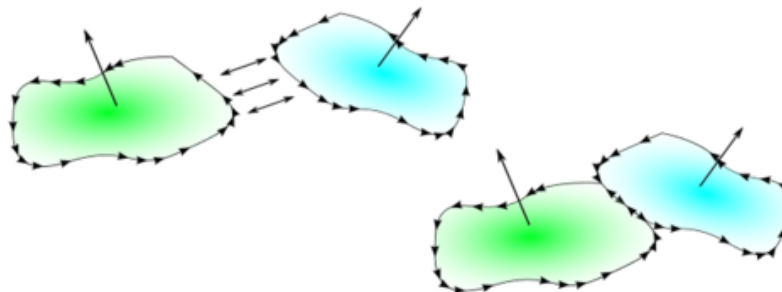


Möbiusarborði er ekki áttanlegur.

7.13.2 Umræða

Ef áttanlegur flötur \mathcal{S} hefur jaðar þá skilgreinir áttunin stefnu á jaðri \mathcal{S} . Venjan er að velja stefnu jaðarsins þannig að þegar gengið er eftir honum sé einingarþvigrasviðið á vinstri hönd (hægri handar regla).

Ef tveir áttanlegir fletir hafa jaðar má splæsa þeim saman í áttanlegan flöt með því að líma þá saman á (hluta af) jöðrunum og gæta þess að jaðramir hafi andstæða stefnu á samskeytunum.



7.13.3 Setning

Gerum ráð fyrir að \mathcal{S} sé áttanlegur flötur og $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sé regluleg stikun á \mathcal{S} (það er, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ eru samfelld föll af u og v og vigrarnir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ eru línulega óháðir). Þá er

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$$

einingarþvervigrasvið á \mathcal{S} .

7.14 Heildi vigursviðs yfir flöt - Flæði

7.14.1 Skilgreining og ritháttur

Látum \mathcal{S} vera áttanlegan flöt stikaðan af reglulegum stikaferli $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ með samfelldar hlutafleiður. Látum \mathbf{N} tákna einingarþvervigrasviðið sem gefið er í Setningu 5.13.3. Heildi vigursviðs \mathbf{F} yfir flötinn \mathcal{S} er skilgreint sem

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \, du \, dv.$$

Slík heildi eru oft nefnd *flæði* vigursviðsins \mathbf{F} gegnum flötinn \mathcal{S} .

Ritum $d\mathbf{S} = \mathbf{N} \, dS$. Þá er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

7.14.2 Samantekt

1. Ef $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er stikun á \mathcal{S} þá er

$$d\mathbf{S} = \pm \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \, du \, dv.$$

2. Ef \mathcal{S} er graf $z = f(x, y)$ þá er

$$d\mathbf{S} = \pm \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \, dx \, dy.$$

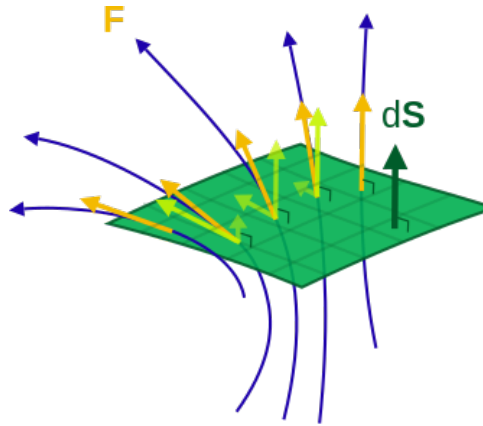
3. Gerum ráð fyrir að flöturinn \mathcal{S} í \mathbb{R}^3 hafi þann eiginleika að ofanvarp hans á xy -planið sé eintækt eða með öðrum orðum hægt er að lýsa fletinum sem grafi $z = f(x, y)$. Ef fletinum \mathcal{S} er lýst sem hæðarfleti $G(x, y, z) = C$ þá er

$$d\mathbf{S} = \pm \frac{\nabla G(x, y, z)}{|\nabla G(x, y, z)|} \, dS = \pm \frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3(x, y, z)} \, dx \, dy.$$

Val á áttun felst í því að velja + eða - í formúlunum hér að ofan.

7.14.3 Túlkun

Hugsum okkur að vigursviðið \mathbf{F} lýsi streymi vökva. Hugsum svo flötinn \mathcal{S} sem himnu sem vökvinn getur streymt í gegnum. Áttun á \mathcal{S} gefur okkur leið til að tala um hliðar flatarins og að vökvinn streymi í gegnum flötinn frá einni hlið til annarrar. Streymi vökvans gegnum flötinn (rúmmál per tímaeiningu) er gefið með heildinu $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ þar sem streymi í stefnu \mathbf{N} reiknast jákvætt.



 Diffur- og heildareikningur vigursviða

A reader lives a thousand lives before he dies. The man who never reads lives only one.

- George R.R. Martin, A Dance with Dragons

8.1 grad, div og curl

8.1.1 Skilgreining

Skilgreinum *nabla*-virkjann sem diffurvirkja

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

8.1.2 Skilgreining

Látum $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \mathbf{i} + F_2(x, y, z) \mathbf{j} + F_3(x, y, z) \mathbf{k}$ vera vigursvið og $\varphi(x, y, z)$ vera fall.

Skilgreinum *stigul* φ sem vigursviðið

$$\mathbf{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Skilgreinum *sundurleitni* vigursviðsins \mathbf{F} sem

$$\mathbf{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Skilgreinum *rót* vigursviðsins \mathbf{F} sem

$$\begin{aligned} \mathbf{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Aðvörun: Ef $\varphi(x, y, z)$ er fall þá er $\nabla\varphi(x, y, z)$ stigullinn af $\varphi(x, y, z)$ en $\varphi(x, y, z)\nabla$ er *diffurvirki*.

Aðvörun: Sundurleitnin $\operatorname{div} \mathbf{F}$ er fall $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en rótið $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ er vigursvið $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

8.1.3 Skilgreining

Látum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ vera vigursvið. Skilgreinum *sundurleitni* \mathbf{F} sem

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

og *rót* \mathbf{F} skilgreinum við sem

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

8.1.4 Reiknireglur

Gerum ráð fyrir að \mathbf{F} og \mathbf{G} séu vigursvið og φ og ψ föll. Gerum ráð fyrir að þær hlutafleiður sem við þurfum að nota séu skilgreindar og samfelldar.

1. $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$.
- (b) $\nabla \cdot (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{F})$.
- (c) $\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi(\nabla \times \mathbf{F})$.
- (d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.
- (e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$.
- (f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$.
- (g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ $\operatorname{div} \operatorname{curl} = 0$
- (h) $\nabla \times (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$ $\operatorname{curl} \operatorname{grad} = \mathbf{0}$
- (i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$.

8.1.5 Skilgreining

Látum \mathbf{F} vera vigursvið skilgreint á svæði D .

- (a) Vigursviðið \mathbf{F} er sagt vera *sundurleitnilaust* eða *uppsprettulaust* ef $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ í öllum punktum D .
- (b) Vigursviðið \mathbf{F} er sagt vera *rótlaut* ef $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ á öllu D .

Athugasemd: Vigursvið $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ er rótlaut ef og aðeins ef

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

8.1.6 Setning

1. Rót vigursviðs er *sundurleitnilaus*.
2. Stigulsvið er *rótlaut*.

8.1.7 Skilgreining

Svæði D í rúmi eða plani kallast *stjörnusvæði* ef til er punktur P í D þannig að fyrir sérhvern annan punkt Q í D þá liggur allt línustrikið á milli P og Q í D .

8.1.8 Setning

Látum \mathbf{F} vera samfelld diffralegt vigursvið skilgreint á *stjörnusvæði* D . Ef \mathbf{F} er rótlaut þá er \mathbf{F} stigulsvið. Með öðrum orðum, ef vigursviðið \mathbf{F} er samfelld diffralegt og skilgreint á *stjörnusvæði* D og uppfyllir jöfnurnar

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y},$$

þá er \mathbf{F} stigulsvið.

8.1.9 Setning

Lát \mathbf{F} vera samfelld diffralegt vigursvið skilgreint á *stjörnusvæði* D . Ef \mathbf{F} er sundurleitnilaut þá er til vigursvið \mathbf{G} þannig að $\mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{G}$. Vigursviðið \mathbf{G} kallast *vigurmætti* fyrir \mathbf{F} .

8.2 Sundurleitnisetningin I

8.2.1 Setning (Sundurleitnisetning I)

Látum \mathbf{F} vera samfelld diffralegt vigursvið skilgreint á opnu mengi D í \mathbb{R}^3 . Látum P vera punkt á skilgreiningarsvæði \mathbf{F} og \mathcal{S}_ε kúluskel með miðju í P og geisla ε . Látum svo \mathbf{N} vera einingarþvervigursvið á \mathcal{S}_ε þannig að \mathbf{N} vísar út á við. Þá er

$$\text{div } \mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{V_\varepsilon} \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS.$$

þar sem $V_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^3/3$ er rúmmálið innan í \mathcal{S}_ε .

8.2.2 Setning (Setning Stokes I)

Látum \mathbf{F} vera samfelld diffralegt vigursvið skilgreint á opnu mengi D í \mathbb{R}^3 . Látum P vera punkt á skilgreiningarsvæði \mathbf{F} og \mathcal{C}_ε vera hring með miðju í P og geisla ε . Látum \mathbf{N} vera einingarþvervigur á planið sem hringurinn liggur í. Áttum hringinn jákvætt. Þá er

$$\mathbf{N} \cdot \text{curl } \mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{A_\varepsilon} \oint_{\mathcal{C}_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

þar sem $A_\varepsilon = \pi\varepsilon^2$ er flatarmálið sem afmarkast af \mathcal{C}_ε .

8.2.3 Túlkun

Hugsum \mathbf{F} sem lýsingu á vökvastreymi í \mathbb{R}^3 .

$\operatorname{div} \mathbf{F}(P)$ lýsir því hvort vökvinn er að þenjast út eða dragast saman í punktinum P . Sundurleitnisetningin (næsti fyrirlestur) segir að samanlögð úþpensla á rúmskika R er jöfn streymi út um jaðar svæðisins S , eða

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS.$$

$\operatorname{curl} \mathbf{F}(P)$ lýsir hringstreymi í kringum punktinn P . Setning Stokes (þar næsti fyrirlestur) segir að samanlagt hringstreymi á fleti S er jafnt hringstreymi á jaðri flatarins, sem við táknum með C , eða

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

8.2.4 Skilgreining

Látum R vera svæði í \mathbb{R}^2 og C jaðar R . Gerum ráð fyrir að C samanstandi af endanlega mörgum ferlum C_1, \dots, C_n . Jákvæð áttun á ferlunum felst í því að velja fyrir hvert i stikun \mathbf{r}_i á C_i þannig að ef labbað eftir C_i í stefnu stikunar þá er R á vinstri hönd.

8.2.5 Setning Green

Látum R vera svæði í planinu þannig að jaðar R , táknaður með C , samanstendur af endanlega mörgum samfelldum diffranlegum ferlum. Áttum C jákvætt. Látum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ vera samfelld diffranlegt vigursvið skilgreint á R . Þá er

$$\oint_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

8.2.6 Fylgisetning

Látum R vera svæði í planinu þannig að jaðar R táknaður með C , samanstendur af endanlega mörgum samfelldum diffranlegum ferlum. Áttum C jákvætt. Þá er

$$\text{Flatarmál } R = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

8.2.7 Sundurleitnisetningin í tveimur víddum

Látum R vera svæði í planinu þannig að jaðar R , táknaður með C , samanstendur af endanlega mörgum samfelldum diffranlegum ferlum. Látum \mathbf{N} tákna einingarþvervigursvið á C þannig að \mathbf{N} vísar út úr R . Látum $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ vera samfelld diffranlegt vigursvið skilgreint á R . Þá er

$$\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds.$$

8.3 Sundurleitnisetningin II

8.3.1 Skilgreining

Flötur er sagður reglulegur ef hann hefur *snertiplan* í hverjum punkti.

Flötur S sem er búinn til með því að taka endanlega marga reglulega fleti S_1, \dots, S_n og líma þá saman á jöðrunum kallast *reglulegur á köflum*.

Þegar talað um einingarþværgisvið á slíkan flöt þá er átt við vigursvið sem er skilgreint á fletinum nema í þeim punktum þar sem fletir S_i og S_j hafa verið límdir saman. Í slíkum punktum þarf flöturinn ekki að hafa snertiplan og því ekki heldur þværgisvið.

Flötur er sagður *lokaður* ef hann er yfirborð svæðis í \mathbb{R}^3 (t.d. er kúluhvel lokaður flötur).

8.3.2 Setning (Sundurleitnisetningin, Setning Gauss)

Látum S vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem S umlykur. Látum \mathbf{N} vera einingarþværgisvið á S sem vísar út úr D . Ef \mathbf{F} er samfelldt diffranlegt vigursvið skilgreint á D þá er

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

8.3.3 Skilgreining

Látum D vera rúmskika í \mathbb{R}^3 . Segjum að rúmskikinn D sé *z-einfaldur* ef til er svæði D_z í planinu og samfelld föll f og g skilgreind á D_z þannig að

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z \text{ og } f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}.$$

Það að rúmskiki sé *x*- eða *y*-einfaldur er skilgreint á sama hátt.

8.3.4 Setning

Látum S vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem S umlykur. Látum \mathbf{N} vera einingarþværgisvið á S sem vísar út úr D . Ef \mathbf{F} er samfelldt diffranlegt vigursvið skilgreint á D og φ diffranlegt fall skilgreint á D þá er

$$\iiint_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \, dV = - \iint_S \mathbf{F} \times \mathbf{N} \, dS,$$

og

$$\iiint_D \operatorname{grad} \varphi \, dV = \iint_S \varphi \mathbf{N} \, dS.$$

Athugið að útkomurnar úr heildunum eru vigrar.

8.4 Setning Stokes

8.4.1 Skilgreining

Látum S vera áttanlegan flöt sem er reglulegur á köflum með jaðar C og einingarþværgisvið \mathbf{N} . Áttun C út frá \mathbf{N} finnst með að hugsa sér að gengið sé eftir C þannig að skrokkurinn vísi í stefnu \mathbf{N} og göngustefnan sé valin þannig að flöturinn sé á vinstri hönd.

8.4.2 Setning (Setning Stokes)

Látum S vera áttanlegan flöt sem er reglulegur á köflum og látum \mathbf{N} tákna einingarþværgisvið á S . Táknum með C jaðar S og áttun C með tilliti til \mathbf{N} . Ef \mathbf{F} er samfelldt diffranlegt vigursvið skilgreint á *opnu mengi* sem inniheldur S þá er

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds.$$

8.4.3 Setning

Látum \mathbf{F} vera samfelld diffralegt vigursvið skilgreint á opnu mengi D í \mathbb{R}^3 . Látum P vera punkt á skilgreiningarsvæði \mathbf{F} og C_ε vera hring með miðju í P og geisla ε . Látum \mathbf{N} vera einingarþvervigur á planið sem hringurinn liggur í. Áttum hringinn jákvætt. Þá er

$$\mathbf{N} \cdot \text{curl } \mathbf{F}(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

8.4.4 Setning

Látum S vera lokaðan flöt sem er reglulegur á köflum. Táknum með D rúmskikann sem S umlykur. Látum \mathbf{N} vera einingarþvervigursvið á S sem vísar út úr D . Ef \mathbf{F} er samfelld diffralegt vigursvið skilgreint á opnu mengi sem inniheldur D , þá er

$$\oint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = 0.$$

8.5 Hagnýtingar í eðlisfræði

8.5.1 Vökvaflæði

Skoðum vökvaflæði í rúmi. Hugsum okkur að vökvaflæðið sé líka háð tíma. Látum $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ tákna hraðavigur agnar sem er í punktinum (x, y, z) á tíma t . Látum $\delta(x, y, z, t)$ tákna efnisþéttleika (massi per rúmmálseiningu) í punktum (x, y, z) á tíma t . Þá gildir að

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \text{div}(\delta \mathbf{v}) = 0.$$

(Þessi jafna kallast samfelldnijafnan um vökvaflæðið.)

8.5.2 Vökvaflæði

Til viðbótar við \mathbf{v} og δ þá skilgreinum við $p(x, y, z, t)$ sem þrýsting og \mathbf{F} sem utanaðkomandi kraft, gefinn sem kraftur per massaeiningu. Þá gildir að

$$\delta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \delta(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \delta \mathbf{F}.$$

(Þessi jafna er kölluð hreyfijafna flæðisins.)

8.5.3 Rafsvið - Lögmál Coulombs

Látum punkthleðslu q vera í punktinum $\mathbf{s} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k}$. Í punktum $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ er rafsviðið vegna þessarar hleðslu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

þar sem ε_0 er rafsvörunarstuðull tómarúms.

8.5.4 Rafsvið - Lögmál Gauss (fyrsta jafna Maxwells)

Látum $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ vera hleðsludreifingu og \mathbf{E} rafsviðið vegna hennar. Þá gildir að

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

8.5.5 Rafsvið

Látum $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ vera hleðsludreifingu á takmörkuðu svæði R og \mathbf{E} rafsviðið vegna hennar. Ef við setjum

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_R \frac{\rho(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} dV$$

þá er $\mathbf{E} = \nabla\varphi$ og þar með er

$$\mathbf{curl} \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

8.5.6 Segulsvið - Lögmál Biot-Savart

Látum straum I fara eftir ferli \mathcal{F} . Táknum segulsviðið með \mathbf{H} og látum $\mathbf{s} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k}$ vera punkt á ferlinum \mathcal{F} . Þá gefur örbútur $d\mathbf{s}$ úr \mathcal{F} af sér segulsvið

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

þar sem μ_0 er segulsvörunarstuðull tómarúms. Af þessu sést að

$$\mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

og sýna má að ef $\mathbf{r} \notin \mathcal{F}$ þá er

$$\mathbf{curl} \mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

8.5.7 Segulsvið - Lögmál Ampére

Hugsum okkur að straumur I fari upp eftir z -ás. Táknum með \mathbf{H} segulsviðið og $H = |\mathbf{H}|$. Í punkti $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ í fjarlægð a frá z -ás er $H = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ og ef C er lokaður einfaldur ferill sem fer rangsælis einu sinni umhverfis z -ásinn þá er

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I.$$

Hugsum okkur að $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ sé straumþéttleiki í punkti \mathbf{r} (straumur á flatareiningu). Þá er

$$\mathbf{curl} \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Einnig gildir að ef við setjum

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_R \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} dV,$$

þá er $\mathbf{H} = \mathbf{curl} \mathbf{A}$ og því er

$$\mathbf{div} \mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

8.5.8 Samantekt

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \mathbf{div} \mathbf{H} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{curl} \mathbf{E} &= \mathbf{0} & \mathbf{curl} \mathbf{H} &= \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}$$

Jöfnur Maxwells

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \operatorname{curl} \mathbf{H} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

My old grandmother always used to say, Summer friends will melt away like summer snows, but winter friends are friends forever.

- George R.R. Martin, A Feast for Crows

9.1 Kennsluáætlun

Dags.	Efni	Nótur	Adams Calculus
08.01.18. - 10.01.18.	1. Ferlar. Viðbótarefni: Kross- margfeldi. 2. Ferlar í plani og pól- hnit.	1.1-1.5. - 1.6-1.10.	8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 11.1, 11.2, 11.3, 10.3. 8.4, 8.5, 8.6.
15.01.18. 17.01.18.	3. Krappi og vindingur. 4. Föll af mörgum breytistærðum.	1.10-1.17. 2.1-2.10.	11.4, 11.5, 11.6. 12.1, 12.2.
22.01.18. 24.01.18.	5. Hlutafléiður. 6. Keðjureglan	2.11-2.13. 2.14-2.15.	12.3, 12.4. 12.5.
29.01.18 31.01.18.	7. Línulegar nálganir. 8. Stiglar.	2.16-2.25. 2.26-2.31.	12.6. 12.7.
05.02.18. 07.02.18.	9. Fólgin föll og Taylor- nálganir. 10. Útgildi.	2.32. 3.1-3.9.	12.8, 12.9. 13.1, 13.2.
12.02.18. 14.02.18.	11. Lagrange margfald- arar. 12. Tvöföld heildi.	3.10-3.11. 4.1-4.4.	13.2, 13.3. 14.1, 14.2, 14.3.
19.02.18. 21.02.18. -	13. Meira um tvöföld heildi. 14. Breytuskipti. Próf úr lesnu efni.*	4.5-4.7. 4.8. -	14.1, 14.2, 14.3. 14.4. -
26.02.18. 28.03.18.	15. Þreföld heildi. 16. Hagnýtingar marg- faldrá heilda.	4.9. 4.10-4.14.	14.5, 14.6. 14.7.
05.03.18. 07.03.18.	17. Vigursvið og stigul- svið. 18. Ferilheildi.	5.1-5.3. 5.4-5.5.	15.1, 15.2. 15.3.
12.03.18. 14.03.18.	19. Ferilheildi og stigul- svið. 20. Fletir.	5.6. 5.7-5.11.	15.2, 15.3, 15.4. 15.5. Framhald á næstu síðu

Tafla 9.1 – framhald frá fyrri síðu

Dags.	Efni	Nótur	Adams Calculus
19.03.18. 21.03.18. -	21. Flatarheildi. 22. Áttanlegir fletir. Próf úr skiladæmum.*	5.12. 5.13-5.15. -	15.5, 15.6. 15.6. -
26.03.18. 28.03.18.	23. grad, div og curl. Páskafri	6.1. -	16.1, 16.2. -
02.04.18. 04.04.18.	Páskafri 24. Sundurleitnisetning- in I.	- 6.2.	- 16.2, 16.3, 16.4.
09.04.18. 11.04.18.	25. Sundurleitnisetning- in II. 26. Setning Stokes	6.3. 6.4.	16.2, 16.3, 16.4. 16.5, 16.6.
16.04.18. 18.04.18.	27. Hagnýtingar í eðlis- fræði. 28. Langur dæmatími.	6.5. -	16.6. Gömul próf.

Kaflanúmer í Adams Calculus miðast við 8. útgáfu kennslubókarinnar. Megináhersla er á efni þeirra kafla sem eru feitletraðir. Nemendur í Stærðfræðigreiningu IIE sækja tíma 1-19 og tíma 28 að tíma 9 undanskildum.

*Með fyrirvara um breyttar dagsetningar.